

**GRUNDBEGRIFFE
DER
KONTINUUMSMECHANIK**

KRZYSZTOF WILMANSKI
TECHNISCHE UNIVERSITÄT HAMBURG-HARBURG

HAMBURG, 1990

Dr.-Ing. habil. KRZYSZTOF WILMANSKI

Geboren 1940 in Lodz/Polen. Von 1957 bis 1962 Studium des Bauwesens an der TU Lodz/Polen. Promotion auf dem Gebiet der Kontinuumsmechanik an der TU Lodz/Polen 1965. Habilitation auf dem Gebiet der Körper mit Mikrostrukturen am Institut für Grundlagen der Technik (Polnische Akademie der Wissenschaften, Warschau, Polen) 1970. Von 1971 bis 1986 Professor für Mechanik am selben Institut. Seit 1984 Wissenschaftsfellow und wissenschaftlicher Mitarbeiter am Wissenschaftskolleg zu Berlin, an der TU Berlin, der Universität Paderborn und der TU Hamburg-Harburg.

Vorwort

Die Entwicklung der nicht-linearen Kontinuumsmechanik hat eine genau so lange Geschichte wie jene der linearen Elastizitätstheorie, und in der Anfangsphase wurden die beiden Gebiete nicht so streng voneinander getrennt wie das heute der Fall ist. Die Schwierigkeiten bei der Lösung nicht-linearer Differentialgleichungen haben jedoch zur Folge, daß zwar die lineare Theorie als Teil der Ingenieurwissenschaften sehr früh akzeptiert wurde, die nicht-lineare Theorie in der Ingenieurspraxis jedoch als fast unbrauchbar verurteilt und nur als ein Teil der angewandten Mathematik erforscht wurde.

Die Lage hat sich in den letzten Jahrzehnten aus zweierlei Gründen geändert. Einerseits wurden die Ergebnisse der nicht-linearen Kontinuumsmechanik in der Werkstofftheorie — insbesondere bei der Modellbildung für Flüssigkeiten, Gummi, Kunststoffe, Umformverfahren usw. — benötigt, und die Nichtlinearität wurde nicht mehr als Hindernis, sondern als Erklärung zahlreicher physikalisch wesentlicher Effekte betrachtet. Andererseits hat die Entwicklung numerischer Methoden und der Computertechnik die technischen Schwierigkeiten nicht-linearer Gleichungssysteme überwunden.

Dennoch haben sich die alten Vorurteile der Ingenieure gegenüber der nicht-linearen Kontinuumsmechanik bis heute erhalten. Diese Theorie stößt immer noch als zu „mathematisiert“ und nicht „ingenieur-gemäß“ auf die Ablehnung der Praktiker.

Das Ziel dieser Aufzeichnungen ist zweifach: Einerseits sollen die Grundbegriffe der Kontinuumsmechanik anschaulich und ohne die nicht unbedingt nötige Bürde ausgefeilter mathematischer Methoden dargestellt werden. An mathematischen Kenntnissen wird somit nur die übliche Ingenieurmathematik vorausgesetzt. In dieser Hinsicht soll das Buch einen **Brückenschlag** zwischen der an technischen Universitäten gelehrtten Mechanik und der Kontinuumsmechanik schaffen. Andererseits sollen die **Beschränkungen** der kontinuierlichen Modellbildung klar gemacht werden. Unglücklicherweise werden diese Beschränkungen sehr häufig nicht berücksichtigt, und die Fehlentwicklung bei der Modellbildung mit hohem numerischen Aufwand gedeckt. Die in den Kapiteln 2 und 3 dargestellten geometrischen und kinematischen Grundlagen erhalten auch einige mit allen Einzelheiten nachgerechnete einfache Beispiele. Diese Rechnungen sollen zeigen, daß die aus der linearen Theorie der kleinen Verformungen stammenden Schlußfolgerungen in der Regel irreführend sind. Manche Ergebnisse der gegenwärtigen Plastizitätstheorie der großen Verzerrungen stellen ein Beispiel dafür dar, daß diese Schlußfolgerungen gravierende Fehler verursachen können.

Die Theorie der Bilanzgleichungen, die das Kapitel 4 enthält, wird etwas ausführlicher herausgearbeitet als dies üblicherweise der Fall ist. Zum Beispiel werden die Bedin-

gungen auf einer singulären Fläche dargestellt, die für die folgenden Kapitel kaum von Bedeutung sind. Der Grund dafür ist, daß in der Anwendung der Kontinuumsmechanik die Randbedingungen manchmal willkürlich und im Widerspruch mit diesen Bedingungen formuliert werden.

Die Grundlagen der Werkstoffgesetze in den Kapiteln 5 und 6 unterscheiden sich ein bißchen von der herkömmlichen Formulierung durch eine sehr starke Verankerung in dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Dieser Hauptsatz wird am Beispiel des thermoelastischen Werkstoffes und am Beispiel der wärmeleitenden viskosen Flüssigkeit dargestellt. Dieselben Beispiele werden auch zur Erklärung des Prinzips der materiellen Objektivität verwendet.

Die zwei letzten Kapitel enthalten einige Lösungen der nicht-linearen Elastizitätstheorie. Im Kapitel 7 werden die statischen Probleme repräsentiert und die Bedeutung des Begriffes der universellen Lösung betont. Kapitel 8 wird den dynamischen Problemen gewidmet, die sich als Schallwellen darstellen lassen. Der Anhang enthält eine Zusammenfassung der Eigenschaften krummliniger Koordinaten im Euklidischen Raum, die in den Beispielen benutzt wurden.

Der Inhalt dieser Aufzeichnungen entspricht dem Stoff, den ich im Wintersemester 1989/90 in einer Vorlesungsreihe am Arbeitsbereich Meerestechnik II der Technischen Universität Hamburg-Harburg gehalten habe. Den Kollegen dieser Universität, die mir gelegentlich geholfen haben meine Meinung über den Inhalt und die Formulierung der Aufzeichnungen herauszubilden, möchte ich sehr herzlich danken.

Besonders verpflichtet bin ich Herrn Dr.-Ing. V. Schlegel (TUHH). Ohne seine Ermütigungen, wertvollen Ratschläge, ohne den ständigen Einsatz und, nicht zuletzt, ohne die sprachlichen Korrekturen hätte ich dieses Buch nicht schreiben können.

Frau M. Schmidt gilt mein herzlicher Dank für das Zeichnen der Abbildungen.

Herrn cand.mach. O. Kunze möchte ich für seine sehr sorgfältige Textverarbeitung mit \LaTeX danken.

Hamburg, Februar 1990.

K. Wilmanski

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	2
1 Einführung	6
2 Geometrie	12
3 Kinematik	24
4 Bilanzgleichungen	31
4.1 Einführung	31
4.2 Bilanz der Masse	32
4.3 Impulsbilanz	38
4.4 Drallbilanz	43
4.5 Energiebilanz	45
4.6 Entropiebilanz	47
5 Werkstoffgesetze — Beispiele	50
5.1 Vorbemerkungen	50
5.2 Materielle Objektivität	53
5.3 Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik	56
5.4 Thermodynamik des thermoelastischen Materials	59
5.5 Thermodynamik der wärmeleitenden viskosen Flüssigkeit	62
6 Werkstoffe mit inneren Zwangsbedingungen	66
7 Gummiähnliche Werkstoffe	70
7.1 Einführung	70
7.2 Homogene Verzerrungen	73
7.3 Heterogene Verzerrungen	76
8 Schallwellen	80
8.1 Einführung	80
8.2 Wellenfront	81
8.3 Ausbreitung der Beschleunigungswelle	85

5. November 1990

5

Anhang Krummlinige Koordinaten

92

Literaturverzeichnis

104

Sachverzeichnis

105

1 Einführung

Der Zweck dieses Skriptes ist zweifach: die Grundrisse und die wichtigsten Begriffe der Kontinuumsmechanik vorzustellen und die Anwendungsbeschränkungen eines Kontinuumsmodells zu klären. Einerseits werden wir versuchen, die genaue Modellbildung zu verfolgen, andererseits werden die mathematischen Grundlagen so weit vereinfacht, wie es nur möglich ist ohne die wichtigsten formalen Strukturen eines Modells zu fälschen. Zunächst versuchen wir den rein geometrischen Anteil der Kontinuumstheorie herzuleiten. Fast alle Modelle von praktischer Bedeutung, die man im Rahmen der Kontinuumsmechanik herstellt, beruhen auf dem euklidischen dreidimensionalen Raum und wir werden auch nur solche Räume in der Modellbildung anwenden.

Das wichtigste Merkmal der kontinuierlichen Modellbildung wird durch zwei Ansätze bestimmt:

1. daß man ein physikalisches Objekt geometrisch als ein **dreidimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit** beschreiben kann und diese Mannigfaltigkeit ein kompaktes offenes Bild B_0 im euklidischen Raum hat, und
2. daß die Bewegung des Objektes durch eine mindestens **stetige Abbildung**

$$\boxed{f(\cdot, t) : B_0 \longrightarrow R^3} \quad t \in \langle t_1, t_2 \rangle \quad (1.1)$$

wiedergegeben wird.

Diese zwei Eigenschaften beschränken wesentlich die Möglichkeiten, die wirklichen Vorgänge mittels der Kontinuumsmechanik zu beschreiben. Um diese Feststellung zu begründen betrachten wir einige Beispiele.

1. Lineare Kette der Massen und Federn: Sowohl dieses Modell als auch dessen verschiedene kompliziertere Modifikationen werden sehr häufig in der Festkörperphysik benutzt um die Wellenausbreitung im Gitter zu untersuchen. Das System besteht aus einer unendlichen Reihe der gleichen Massen M , die mit gleichstarken Federn verbunden sind (Abb. 1.1).

Die Entfernung der Massenpunkte im Ruhezustand ist a und wir betrachten die Bewegung der Massen in der Richtung der Kette; die entsprechende Verschiebung der Masse n bezeichnen wir als u_n . Die Bewegungsgleichung der Masse n folgt aus dem

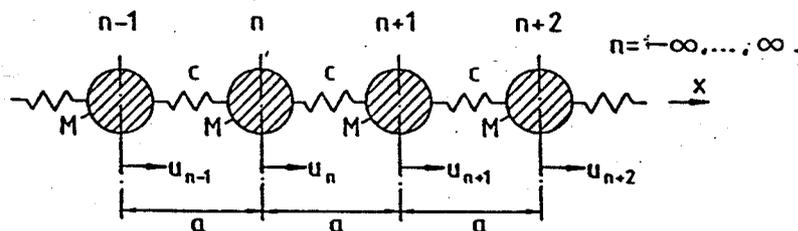


Abb. 1.1: Lineare Kette der Massen und Federn.

Lagrangeschen Funktional

$$L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} M \left(\frac{du_n}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} c (u_n - u_{n-1})^2 - \frac{1}{2} c (u_{n+1} - u_n)^2 \right] dt.$$

Nach dem Hamiltonschen Prinzip gilt es für $\delta u_n \neq 0$ und $\delta u_k = 0$ für $k \neq n$ in (t_1, t_2) :

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_{t_1}^{t_2} \left[M \frac{du_n}{dt} \delta \left(\frac{du_n}{dt} \right) - c (u_n - u_{n-1}) \delta u_n - c (u_{n+1} - u_n) (-\delta u_n) \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[-M \frac{d^2 u_n}{dt^2} - c (u_n - u_{n-1}) + c (u_{n+1} - u_n) \right] \delta u_n dt + M \frac{du_n}{dt} \delta u_n \Big|_{t_1}^{t_2} = 0. \end{aligned}$$

Es folgt die Bewegungsgleichung ($\delta \dot{u}_n(t_1) = \delta u_n(t_2) \equiv 0$)

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{c}{M} (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n). \quad (1.2)$$

Wir suchen die Wellenlösung in der Form

$$u_n = U \exp i(kna - \omega t). \quad (1.3)$$

Die Substitution dieser Lösung in Gl. (1.2) ergibt die Dispersionsgleichung

$$-\omega^2 u_n = \frac{c}{M} [e^{ika} + e^{-ika} - 2] u_n = -2 \frac{c}{M} [1 - \cos ka] u_n = -4 \frac{c}{M} \sin^2 \frac{ka}{2} u_n,$$

d. h.

$$\omega^2 = 4 \frac{c}{M} \sin^2 \frac{ka}{2}. \quad (1.4)$$

Offensichtlich nur die „Wellenvektoren“ k , die im Intervall

$$-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$$

liegen, liefern die wesentlichen Beiträge (Abb. 1.2).

Dies bedeutet, daß die Wellen, deren Länge kürzer als a ist, sich überhaupt nicht in dieser Kette ausbreiten können.

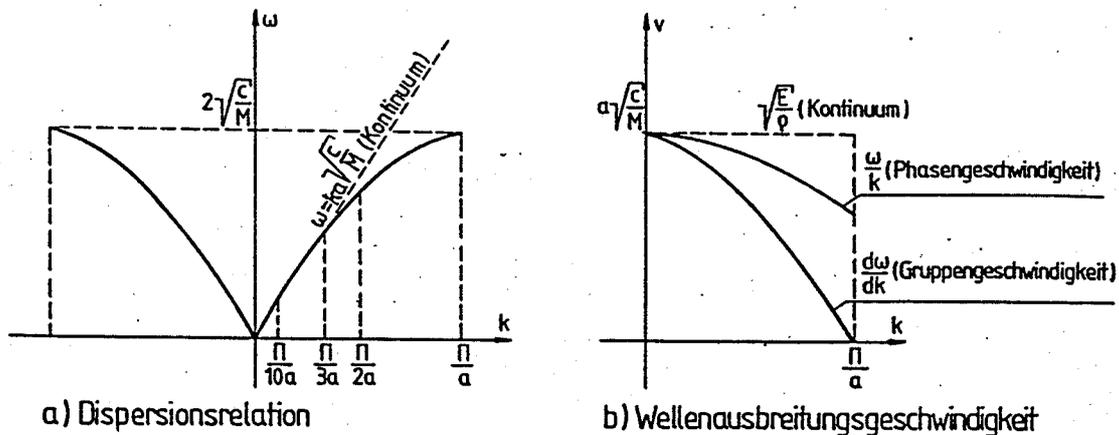


Abb. 1.2: Dispersionskurve für die diskrete Kette

Im Fall des Kontinuumsmodells müssen wir die Massenverteilung unendlich dicht machen mit der Bedingung, daß die Massendichte endlich bleibt:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{M}{a} =: \rho < \infty.$$

In dieser Grenze bekommen die Gln. (1.2) und (1.3) die Gestalt

$$\boxed{na \rightarrow x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{ca^2}{M} \frac{u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n}{a^2} = \left(\frac{E}{\rho} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.5)$$

$$u(x, t) = U \exp i(kx - \omega t)$$

mit der Bedingung

$$E := \lim_{c \rightarrow \infty} ca < \infty.$$

Die entsprechende Dispersionsgleichung ist dann

$$\omega^2 = \frac{E}{\rho} k^2 \Rightarrow \omega = ka \sqrt{\frac{E}{\rho a^2}} = ka \sqrt{\frac{c}{M}}. \quad (1.6)$$

Diese Lösung nähert sich der Lösung (1.4) nur im Falle sehr kleiner Werte des „Vektors“ k . Diese Eigenschaft läßt sich folgendermaßen formulieren:

das Kontinuumsmodell ist die langwellige Näherung des mikroskopischen Systems mit einer diskreten Massenverteilung (z.B. Gitter der Metalle, Kettenmoleküle der Kunststoffe, freibewegliche Gasmoleküle usw.).

Der Übergang $na \rightarrow x$ von der diskreten Kette zum Kontinuum transformiert die diskrete Menge der Zahlen in eine eindimensionale Mannigfaltigkeit um. Das bedeutet, daß der erste Ansatz der kontinuierlichen Modellbildung (S.6) die untere Grenze für den Längenmaßstab der physikalischen Vorgänge festlegt.

2. Rißausbreitung: Wir beschäftigen uns jetzt mit dem Beispiel des Vorganges, dessen Kontinuumsmodell nicht existiert, weil wir den zweiten Ansatz – die Stetigkeit der Bewegungsfunktion – annehmen.

Die übliche Cauchysche Definition für eine reelle Funktion f der realen Variablen x verlangt, daß diese Funktion stetig auf dem Intervall (a_1, a_2) ist, wenn

$$\forall x \in (a_1, a_2) : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x + \varepsilon). \quad (1.7)$$

Man erweitert diese Definition auf die vektoriiellen Funktionen auf dem dreidimensionalen Raum in der bekannten Weise. Diese Formulierung hat den Nachteil, sich nicht einfach interpretieren zu lassen.

Infolgedessen ziehen wir eine topologische Definition vor. Die Topologie eines Raumes wird durch eine Familie sogenannter offener Mengen definiert. Zum Beispiel entsteht die Topologie des Intervalls (a_1, a_2) durch die Annahmen

- (a_1, a_2) und \emptyset sind die offenen Mengen,
- jedes Intervall $I := (b, c)$ mit $a_1 < b < c < a_2$ ist eine offene Menge,
- jede unendliche Summe der offenen Mengen ist eine offene Menge,
- jedes endliche Produkt der offenen Mengen ist eine offene Menge.

Im Euklidischen Raum R^3 werden z.B. die Kugeln ohne die äußere Sphäre (ohne Rand!) die offenen Mengen.

Wir werden weiter die folgende Bezeichnung häufig benutzen

$$f(P_0, t) := \{f(X, t) \mid X \in P_0 \subset B_0\}. \quad (1.8)$$

Dann sagt man, daß eine umkehrbare Funktion $f(\cdot, t)$ stetig auf B_0 ist, wenn ein Bild der offenen Menge $V \subset R^3$

$$f^{-1}(V, t) \subset B_0 \quad (1.9)$$

auch eine offene Menge ist. Diese Definition gilt für beliebige topologische Räume, und dort, wo man die Cauchysche Definition anwenden kann, sind die beiden Definitionen äquivalent.

Nach dieser Definition ist eine Abbildung f (Abb. 1.3) der offenen Menge A (ohne

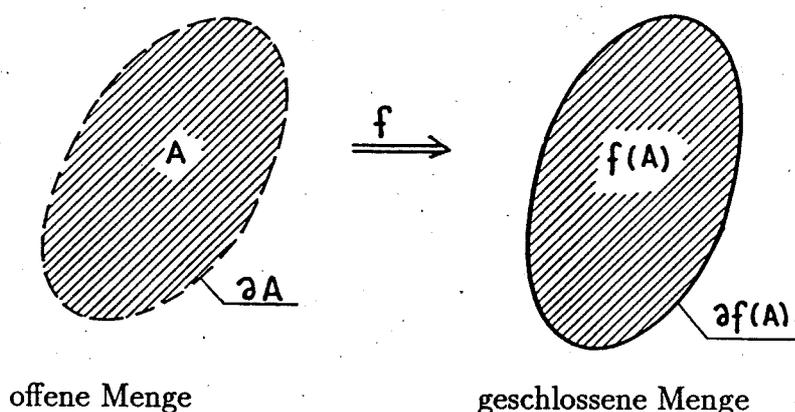


Abb. 1.3: Unstetige Bewegungsfunktion

Rand!) auf eine geschlossene Menge B (mit Rand) eine unstetige Funktion. Diese Eigenschaft hat gravierende Folgen für, im Rahmen der Kontinuumstheorie zulässigen, Vorgänge.

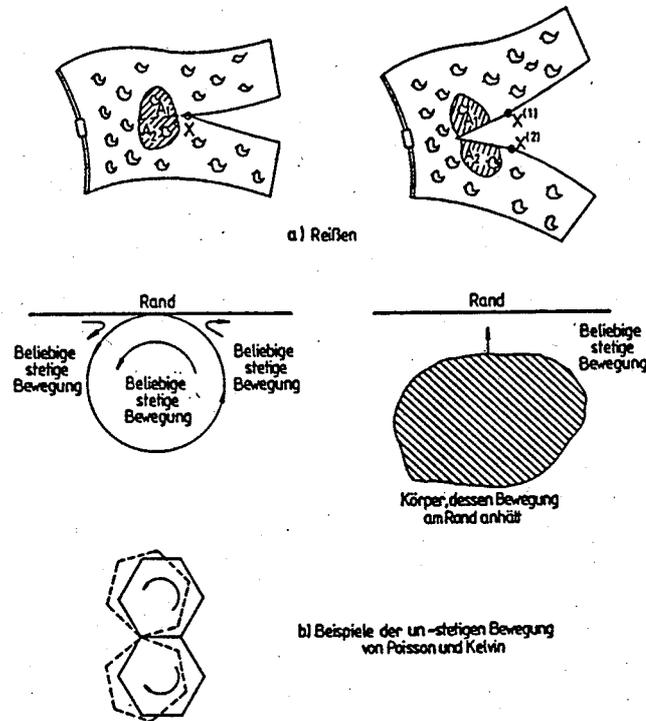


Abb. 1.4: Beispiele un stetiger Bewegungen.

Als Beispiel betrachten wir das Medium mit dem Riß (Abb. 1.4a). Durch ein Bewegungs- und Beanspruchungsprozeß wurde der Riß weiter geöffnet. Das heißt, daß die Mengen, wie $A = A_1 \cup A_2$, in solcher Bewegung getrennt werden. Nehmen wir an, daß A und A_1 offene Mengen sind und daß $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Es ist offensichtlich, daß die Trennung der Mengen durch den Riß die offene Menge A_1 in die nicht offene Menge \tilde{A}_1 umtransformiert. Der obere Rand des Risses entsteht im Deformationsprozeß. Das bedeutet, daß die Bewegungsfunktion auf der Menge A_1 :

$$f_{/A_1} : X \mapsto f(X) \in \tilde{A}_1 \quad (1.10)$$

eine un stetige Funktion sein muß.

Eine ähnliche Trennung der Mengen entsteht bei sehr starker Mischung einer Flüssigkeit, die Turbulenz genannt wird (Abb. 1.5).

Bemerkung 1: Die Bildung einzelner neuer Flächen kann durch die Kontinuumsmechanik mit erfaßt werden – wir werden einige Möglichkeiten weiter erörtern. Andererseits ist die Turbulenz durch Methoden der Kontinuumsmechanik unbeschreibbar.

Bemerkung 2: Sowohl die geometrischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit als auch die obigen Beispiele zeigen eindeutig, daß im Falle des Kontinuums es keinen Sinn macht über einzelne Teilchen zu reden. Die Punkte der Mannigfaltigkeit besitzen weder eine Masse noch andere physikalische Eigenschaften; zwei Punkte, zwei verschiedenen geschlossenen Mengen angehören, kann man einerseits beliebig voneinander entfernen, andererseits müssen die Nachbarschaftsbeziehungen enthalten bleiben usw. Trotzdem werden wir die Punkte der Mannigfaltigkeit die **materielle Teilchen** nennen, um sie

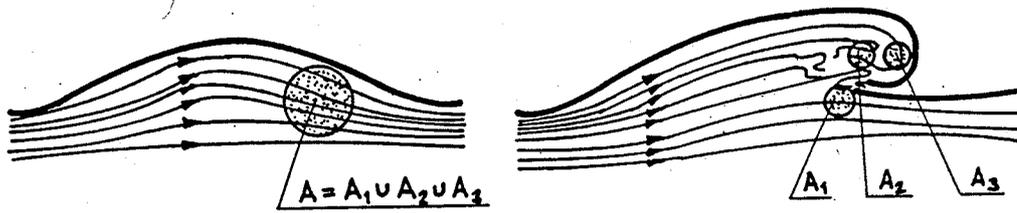


Abb. 1.5: Turbulente Bewegung einer Flüssigkeit

von Orten im Bewegungsraum zu unterscheiden.

2 Geometrie

Wir behandeln jetzt die rein geometrischen Eigenschaften, die durch die Abbildung $f(\cdot, t)$ für eine gegebene Zeit t von der Mannigfaltigkeit auf die Mengen im Bewegungsraum übertragen werden. Zunächst muß man die Annahmen bezüglich $f(\cdot, t)$ stärken, um die lokale Beschreibung zu ermöglichen. Mit Hilfe solcher Annahmen reicht es völlig aus eine Nachbarschaft des gewählten Teilchens X zu untersuchen.

Ansatz: Die Funktion $f(\cdot, t)$ ist umkehrbar und zweimal stetig differenzierbar, d. h.

$$\left[\begin{array}{l} 1. \quad \mathbf{x} = f(\mathbf{X}, t) \Rightarrow \mathbf{X} = f^{-1}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{X} \in B_0, \quad \mathbf{x} \in R^3 \\ 2. \quad F(\mathbf{X}, t) := \text{Grad}_{\mathbf{X}} f(\mathbf{X}, t), \quad \text{Grad}_{\mathbf{X}} F(\mathbf{X}, t) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

existieren und sind stetig.

Dieser Ansatz ist stärker als manchmal zulässig. Die Einzelfälle, die diesen Ansatz verletzen, werden wir getrennt erörtern.

Die erste Ableitung der Funktion f heißt der **Deformationsgradient**. Es folgt unmittelbar aus 1. und 2., daß

$$\boxed{J := \det F \neq 0.} \quad (2.2)$$

Wir zeigen später, daß, wegen der Massenbilanz, J positiv sein muß.

Der Deformationsgradient spielt die führende Rolle in der Modellierung der Verformung. Um das klar zu sehen betrachten wir eine beliebige Kurve \mathcal{C} in dem Material, deren Abbildung in Referenzkonfiguration B_0 als \mathcal{C}_0 bezeichnet wird:

$$\mathcal{C}_0: \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(S) \quad (2.3)$$

wobei S die Kurve \mathcal{C}_0 parametrisiert.

Untersuchen wir jetzt die Kurve c_t , die die Abbildung der Kurve \mathcal{C}_0 nach der Wirkung der Bewegungsfunktion $f(\cdot, t)$ ist:

$$c_t: \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(S) := f[\mathbf{X}(S), t]. \quad (2.4)$$

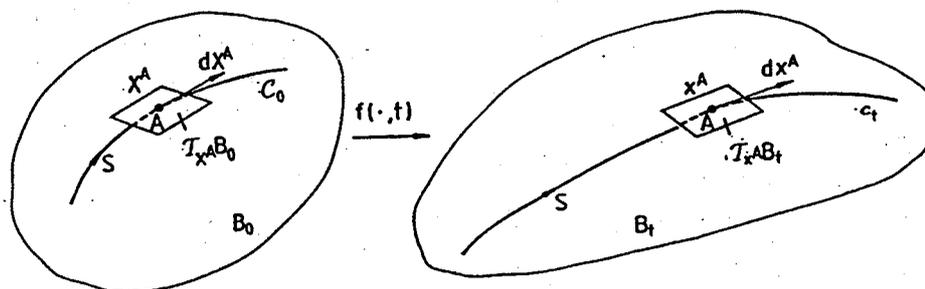


Abb. 2.1: Transformation des materiellen Vektors

Die Änderung der lokalen Eigenschaften dieser Kurve, z. B. auf Stelle A , wird durch den Tangentenvektor bestimmt:

$$\begin{aligned} dX^A &= \frac{dX}{dS}(S^A) dS \xrightarrow{f} dx^A = \frac{\partial x}{\partial S}(S^A, t) dS = \\ &= \frac{\partial f}{\partial X}(S^A, t) dX^A = F(S^A, t) dX^A = F(S^A, t) \frac{dX}{dS}(S^A) dS. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Es folgt

$$\boxed{\frac{\partial x}{\partial S} = F \frac{dX}{dS}} \quad (2.6)$$

Das bedeutet, daß der Deformationsgradient die Transformationsregel der materiellen Vektoren beschreibt. Infolge der kontinuierlichen Modellbildung ist diese Transformation linear. Es ist manchmal vorteilhaft, diese Transformation als die einparametrische Abbildung der Tangentenräume auf Stellen $X \in B_0$ zu betrachten:

$$\boxed{F(X, t)(\cdot) : T_X B_0 \longrightarrow T_x B_t} \quad (2.7)$$

Zum Beispiel sind die Deformationsgradienten der plastischen Verzerrung mit keiner Bewegungsfunktion verbunden. In diesem Fall kann man F nur mit Hilfe der Beziehung (2.7) definieren.

Es ist einfach zu sehen, daß die Beziehung (2.6) die Änderung der Kurvenlänge bestimmt. Denn

$$dx \cdot dx = (F dX \cdot F dX) = dX \cdot (F^T F) dX \quad (2.8)$$

Es gilt dann

$$dx \cdot dx - dX \cdot dX = dX \cdot (F^T F - I) dX \quad (2.9)$$

und die Länge bleibt unverändert, wenn

$$F^T F - I = 0 \quad \Rightarrow \quad F^T = F^{-1}. \quad (2.10)$$

Die letzte Bedingung bedeutet, daß der Deformationsgradient eine **orthogonale** Matrix sein muß, um die konstante Länge zu erhalten. Solche Matrizen beschreiben die reine **Drehung** der materiellen Vektoren.

Andererseits beweist die Beziehung (2.8), daß nicht der Deformationsgradient F , sondern eine symmetrische Kombination

$$\boxed{C := F^T F} \Rightarrow C^T = C \quad (2.11)$$

die Deformationen mißt. Dieser Tensor wird **Rechts-Cauchy-Green - Verzerrungstensor** genannt. Offenkundig ist C ein Verzerrungsmaß, dessen Referenzzustand ($C \equiv I$) mit der Konfiguration B_0 übereinstimmt.

Es gibt auch andere Möglichkeiten. Ein relatives Verzerrungsmaß wird durch (2.9) definiert:

$$\boxed{E := \frac{1}{2}(C - I)} \Rightarrow E^T = E; \quad (2.12)$$

das ist der sog. **Green-St.Venant - Verzerrungstensor**.

Man kann auch die **dualen** Tensoren benutzen, deren Referenzzustand mit der Konfiguration B_t übereinstimmt. Wir haben

$$dX = F^{-1} dx \Rightarrow dX \cdot dX = dx \cdot (F^{-T} F^{-1}) dx = dx \cdot (F F^T)^{-1} dx \quad (2.13)$$

und

$$dX \cdot dX - dx \cdot dx = dx \cdot (I - (F F^T)^{-1}) dx. \quad (2.14)$$

Dann nennen wir

$$\boxed{B := F F^T} \quad \text{Links-Cauchy-Green - Tensor} \quad (2.15)$$

$$\boxed{e := \frac{1}{2}(I - c), \quad c := B^{-1}} \quad \text{Almansi-Hamel - Tensor.}$$

Selbstverständlich sind all diese Tensoren äquivalent, weil die Matrix des Deformationsgradienten umkehrbar ist. Die obige Liste schöpft nicht alle Möglichkeiten aus.

Wir zeigen weiter Beispiele für die Anwendungen dieser Tensoren. Die wesentliche Eigenschaft der Verzerrungstensoren ist deren tensorielle Symmetrie. Das bedeutet, daß statt neun Komponenten des Deformationsgradienten F die Verzerrung nur sechs unabhängige Komponenten besitzt. Das folgt auch aus dem wichtigen Theorem der **polaren Zerlegung**:

für jeden Tensor F , $\det F \neq 0$ gibt es die **eindeutigen** Tensoren R, U, V mit

$$\boxed{F = RU = VR, \quad R^T = R^{-1}, \quad U^T = U, \quad V^T = V,} \quad (2.16)$$

$$\det U \neq 0, \quad \det V \neq 0.$$

Offensichtlich ist R ein orthogonaler Tensor ($R^T R = I$) und das heißt, das R drei unabhängige Komponenten besitzt. Nach diesem Satz bekommen wir

$$C = (RU)^T (RU) = U^2, \quad B = (VR)(VR)^T = V^2 \quad (2.17)$$

usw. Die Tensoren U und V werden genannt

$$\begin{aligned} U & - \text{Rechts-Streck-Tensor} \\ V & - \text{Links-Streck-Tensor} \end{aligned}$$

Beispiele:

Wir führen die rechtshändigen-kartesischen Koordinaten:

$$\{X_\alpha\}, \alpha = 1, 2, 3; \quad \text{auch: } X_1 \equiv X, X_2 \equiv Y, X_3 \equiv Z$$

im Raum der Referenzkonfiguration B_0 (sog. materielle oder Lagrangesche Koordinaten) und

$$\{x_i\}, i = 1, 2, 3; \quad \text{auch: } x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$$

im Bewegungsraum der aktuellen Konfiguration B_t (sog. Ortskoordinaten oder Eulersche Koordinaten) ein.

$$1) \text{ Isochore Streckung: } x = \lambda(t)X, \quad y = \frac{1}{\sqrt{\lambda(t)}}Y, \quad z = \frac{1}{\sqrt{\lambda(t)}}Z.$$

Es folgt unmittelbar aus den Definitionen:

$$F = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}, \quad \det F = 1, \quad F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$R = I, \quad U = F, \quad V = F^{-1},$$

$$C = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, \quad B = C, \quad c = B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$E = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} - 1 \end{pmatrix}, \quad e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{usw.}$$

Es ist bemerkenswert, daß keiner von diesen Verzerrungstensoren symmetrisch auf eine Transformation: Zug \rightarrow Druck reagiert. Der Begriff der Verformung, der aus einer linearen Theorie der Stäbe stammt, beschreibt die relative Änderung der Länge:

$$\varepsilon = \frac{x - X}{X} = (\lambda - 1). \quad (2.19)$$

Für $\varepsilon > 0$ ist $\infty > \lambda > 1$ (Zug) und für $\varepsilon < 0$ ist $0 < \lambda < 1$ (Druck). In unserem Sonderfall könnte man das Verzerrungsmaß „symmetrisieren“. Das bedeutet, daß man λ durch eine Funktion $d(\lambda)$ ersetzen könnte, die die Bedingung

$$d\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -d(\lambda) \quad (2.20)$$

erfüllt. Zum Beispiel

$$\begin{aligned} \text{a) } d(\lambda) &= \log \lambda && \Rightarrow -\infty < d(\lambda) < \infty \\ \text{b) } d(\lambda) &= \frac{4}{\pi} \arctan \lambda - 1 && \Rightarrow -1 < d(\lambda) < 1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Diese Funktionen werden manchmal in der Auswertung von Versuchsergebnissen angewendet. Jedoch gibt es in der nicht-linearen Theorie keine Möglichkeit, solche symmetrische Funktionen für beliebige Verformung zu definieren, die gleichzeitig Tensoren werden.

2) Einfache Scherung:

$$x = X, \quad y = Y + (\tan \varphi(t)) Z, \quad z = Z. \quad (2.22)$$

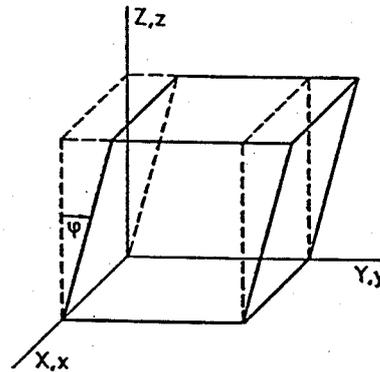


Abb. 2.2: Einfache Scherung

Dann ist

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tan \varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det F = 1, \quad F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\tan \varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Die polare Zerlegung:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R & \sqrt{1-R^2} \\ 0 & -\sqrt{1-R^2} & R \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R & \sqrt{1-R^2} \\ 0 & \sqrt{1-R^2} & \frac{2}{R} - R \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R + \frac{2}{R}(1-R^2) & \sqrt{1-R^2} \\ 0 & \sqrt{1-R^2} & R \end{pmatrix},$$

mit

$$R := \frac{2}{\sqrt{4 + \tan^2 \varphi}} \leq 1.$$

Offensichtlich kann man die Matrix R mit Hilfe der Drehungswinkel, sagen wir α , darstellen:

$$R = \cos \alpha \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \tan^2 \varphi}} = \cos \alpha \Rightarrow \boxed{\tan \alpha = \frac{1}{2} \tan \varphi.} \quad (2.25)$$

Es folgt

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \frac{2}{\cos \alpha} - \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha + 2 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} & \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Wir benutzen dieses Ergebnis weiter, um die materiellen Drehungen in diesem Verformungsprozess zu untersuchen.

Mit Hilfe der Matrizen (2.24) lassen sich die verschiedenen Verzerrungstensoren sehr einfach feststellen. Wir erhalten:

— Rechts-Cauchy-Green:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tan \varphi \\ 0 & \tan \varphi & 1 + \tan^2 \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

— Green-St. Venant:

$$E = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tan \varphi \\ 0 & \tan \varphi & \tan^2 \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

— Links-Cauchy-Green:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \tan^2 \varphi & \tan \varphi \\ 0 & \tan \varphi & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

— Almansi-Hamel:

$$e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tan \varphi \\ 0 & \tan \varphi & -\tan^2 \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Offensichtlich stimmen für $\varphi \ll 1$ diese Ergebnisse mit dem Ergebnis der klassischen Festigkeitslehre überein. Es folgt

$$\varphi \ll 1 \Rightarrow E \approx e \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\varphi \\ 0 & \frac{1}{2}\varphi & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

$$R \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\varphi \\ 0 & -\frac{1}{2}\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir untersuchen jetzt die Einzelheiten der Winkeländerung in der Scherverformung. Dieses Problem hat die sehr wichtige praktische Bedeutung, z.B. in der Formulierung der Stoffgesetze bei großen plastischen Verformungen. Zunächst suchen wir die Eigenvektoren des Rechts-Streck-Tensors, d.h.

$$\boxed{Uk^u = \lambda^u k^u} \quad (2.32)$$

Alle Vektoren k^u , die diese Gleichung erfüllen, bleiben offenbar unverdreht durch die Verformung U . Für Eigenwerte λ^u haben wir die folgende Gleichung

$$\det(U - \lambda^u I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda^u & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha - \lambda^u & \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \frac{2}{\cos \alpha} - \cos \alpha - \lambda^u \end{vmatrix} = 0. \quad (2.33)$$

Es folgt

$$(1 - \lambda^u) \left((\lambda^u)^2 - \lambda^u \frac{2}{\cos \alpha} + 1 \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_{(1)}^u = 1, \lambda_{(2)}^u = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}, \lambda_{(3)}^u = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (2.34)$$

Nach dieser Lösung bekommen wir die folgenden Eigenvektoren:

$$\begin{cases} k_{(1)}^u = (1, 0, 0), \\ k_{(2)}^u = \left(0, 1, -\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \equiv \left(0, 1, \frac{1}{2} \tan \varphi - \sqrt{1 + \frac{1}{4} \tan^2 \varphi} \right), \\ k_{(3)}^u = \left(0, 1, \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \equiv \left(0, 1, \frac{1}{2} \tan \varphi + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \tan^2 \varphi} \right). \end{cases} \quad (2.35)$$

Sie werden in der folgenden Abbildung 2.3 gezeigt.

Die Transformation dieser materiellen Vektoren durch den Deformationsgradient F hat

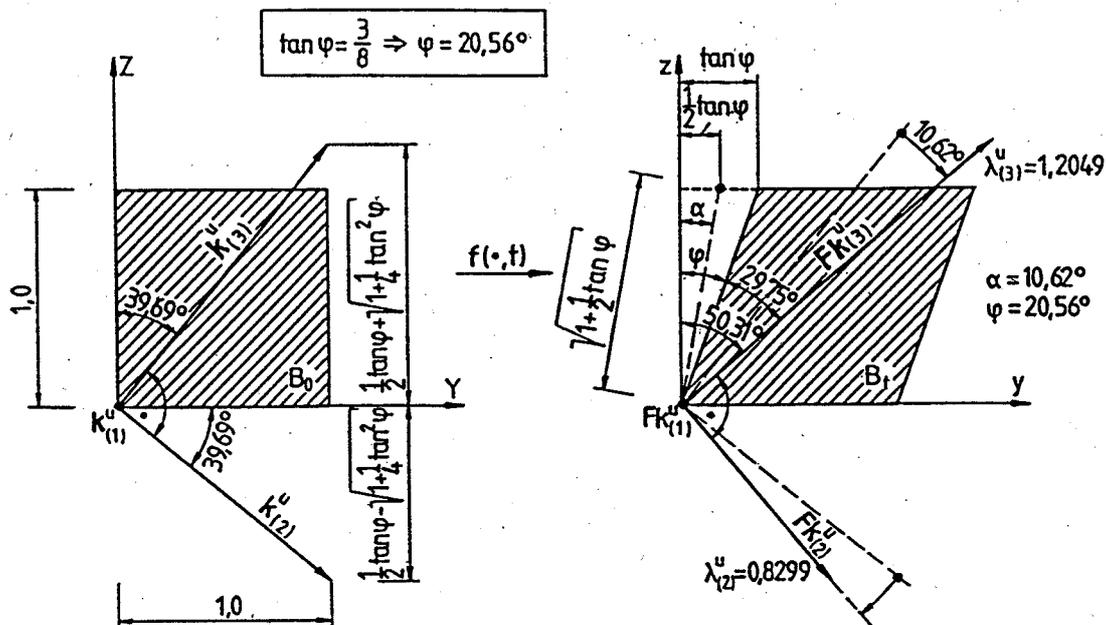


Abb. 2.3: Drehung der Eigenvektoren des Rechts-Streck-Tensors

die folgende Gestalt:

$$Fk_{(1)}^u = RUK_{(1)}^u = \lambda_{(1)}^u Rk_{(1)}^u = (1, 0, 0),$$

$$\begin{aligned} Fk_{(2)}^u &= \lambda_{(2)}^u Rk_{(2)}^u = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} \left(0, \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}, -1 \right) \\ &= \left(0, 1 + \frac{1}{2} \tan^2\varphi - \tan\varphi \sqrt{1 + \frac{1}{4} \tan^2\varphi}, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \tan\varphi - \sqrt{1 + \frac{1}{4} \tan^2\varphi} \right), \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} Fk_{(3)}^u &= \lambda_{(3)}^u Rk_{(3)}^u = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} \left(0, \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}, 1 \right) \\ &= \left(0, 1 + \frac{1}{2} \tan^2\varphi + \tan\varphi \sqrt{1 + \frac{1}{4} \tan^2\varphi}, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \tan\varphi + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \tan^2\varphi} \right). \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} (Fk_{(2)}^u) \cdot (Fk_{(3)}^u) &= k_{(2)}^u \cdot (U^T R^T R U k_{(3)}^u) = (U k_{(2)}^u) \cdot (U k_{(3)}^u) \\ &= \lambda_{(2)}^u \lambda_{(3)}^u k_{(2)}^u \cdot k_{(3)}^u = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Die folgenden Schlußfolgerungen sind einfach zu beweisen:

- a) Eigenvektoren $\mathbf{k}_{(i)}^u$, die sich mit der Verformung \mathbf{U} mitdrehen, sind nicht invariant, d. h. sie sind von \mathbf{U} abhängig. Das bedeutet, daß in der Bewegung die Materialrichtung, deren Orientierung die Verformung \mathbf{U} folgt, nicht unverändert bleibt. In unserem Beispiel ist das die Abhängigkeit der $\mathbf{k}_{(i)}^u$ -Komponenten (2.35) von dem Winkel φ .
- b) Die starre Drehung \mathbf{R} der Hauptrichtungen $\mathbf{k}_{(i)}^u$, die selbst von \mathbf{U} abhängig ist (in unserem Fall: $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{2} \tan \varphi\right)$), entspricht **nicht** der vollständigen Drehung einer beliebigen Richtung. Das beweist die Änderung des Winkels zwischen $\mathbf{k}_{(i)}^u$ und der linken Kante ($\varphi = 0$) von 39.69° auf 29.75° in unserem Beispiel.

Wir schließen das Beispiel mit einigen Beobachtungen, die das Eigenwertproblem für andere Verzerrungstensoren beschreiben.

a) **Rechts-Cauchy-Green \mathbf{C}** : Nehmen wir an, daß $\lambda_{(i)}^u \neq 0$. Wir multiplizieren die Gl. (2.32) mit $\lambda_{(i)}^u$:

$$\begin{aligned} \lambda_{(i)}^u (\mathbf{U} - \lambda_{(i)}^u \mathbf{I}) \mathbf{k}_{(i)}^u &= \mathbf{U} (\lambda_{(i)}^u \mathbf{k}_{(i)}^u) - (\lambda_{(i)}^u)^2 \mathbf{k}_{(i)}^u \\ &= [\mathbf{U}^2 - (\lambda_{(i)}^u)^2 \mathbf{I}] \mathbf{k}_{(i)}^u = [\mathbf{C} - (\lambda_{(i)}^u)^2 \mathbf{I}] \mathbf{k}_{(i)}^u = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Es folgt für den allgemeinen Fall:

$$\lambda_{(i)}^c = (\lambda_{(i)}^u)^2, \quad \mathbf{k}_{(i)}^c = \mathbf{k}_{(i)}^u. \quad (2.39)$$

In unserem Fall

$$\begin{aligned} \lambda_{(1)}^c &= 1, \quad \lambda_{(2)}^c = \left(\frac{1-\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} \tan^2 \varphi - \tan \varphi \sqrt{1 + \frac{1}{4} \tan^2 \varphi}, \\ \lambda_{(3)}^c &= \left(\frac{1+\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} \tan^2 \varphi + \tan \varphi \sqrt{1 + \frac{1}{4} \tan^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Wir werden weiter auch die sog. **Invariante** des Tensors \mathbf{C} benutzen. Die Gleichung, die die Eigenwerte des Tensors \mathbf{C} bestimmt, hat die Form

$$\det(\mathbf{C} - \lambda^c \mathbf{I}) = 0. \quad (2.41)$$

Für dreidimensionale Räume ergibt sich dann die Gleichung

$$\boxed{(\lambda^c)^3 - I^C (\lambda^c)^2 + II^C (\lambda^c) - III^C = 0} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}
 I^C &:= \operatorname{sp} C \equiv C_{11} + C_{22} + C_{33}, \\
 II^C &:= \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{13} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{23} & C_{33} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} [(\operatorname{sp} C)^2 - \operatorname{sp} C^2], \\
 III^C &:= \det C,
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

sind die drei Invarianten des Tensors C . Offensichtlich

$$\begin{aligned}
 I^c &= \lambda_{(1)}^c + \lambda_{(2)}^c + \lambda_{(3)}^c, \\
 II^c &= \lambda_{(1)}^c \lambda_{(2)}^c + \lambda_{(1)}^c \lambda_{(3)}^c + \lambda_{(2)}^c \lambda_{(3)}^c, \\
 III^c &= \lambda_{(1)}^c \lambda_{(2)}^c \lambda_{(3)}^c.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Ähnlich wie die Länge (Betrag) des Vektors sind diese drei Zahlen invariant bezüglich einer beliebigen Transformation der Koordinaten für den gegebenen Tensor C .
Nach (2.40) ergibt sich für die einfache Scherung:

$$I^C = II^C = 3 + \tan^2 \varphi, \quad III^C = 1. \tag{2.45}$$

b) Links-Streck V : Die polare Zerlegung (2.16) impliziert

$$V = R U R^T. \tag{2.46}$$

Es folgt

$$R(U - \lambda^u \mathbf{I}) \mathbf{k}^u = (R U R^T R - \lambda^u R) \mathbf{k}^u = (V - \lambda^u \mathbf{I}) R \mathbf{k}^u = 0,$$

und das bedeutet

$$\lambda^v = \lambda^u, \quad \mathbf{k}^v = R \mathbf{k}^u. \tag{2.47}$$

Für unser Beispiel

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_{(1)}^v &= (1, 0, 0), \\
 \mathbf{k}_{(2)}^v &= \left(0, \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}, -1\right) = \left(0, \sqrt{1 + \frac{1}{4} \tan^2 \varphi} - \frac{1}{2} \tan \varphi, -1\right), \\
 \mathbf{k}_{(3)}^v &= \left(0, \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}, 1\right) = \left(0, \sqrt{1 + \frac{1}{4} \tan^2 \varphi} + \frac{1}{2} \tan \varphi, 1\right),
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

c) Links-Cauchy-Green B : Nach Gl. (2.17) folgt für $\lambda^v \neq 0$:

$$\lambda^v (V - \lambda^v \mathbf{I}) \mathbf{k}^v = (V^2 - (\lambda^v)^2 \mathbf{I}) \mathbf{k}^v = 0. \tag{2.49}$$

Das heißt

$$\lambda^b = (\lambda^v)^2, \quad k^b = k^v, \quad (2.50)$$

wobei λ^b und k^b die Eigenwerte und Eigenvektoren des Tensors B bezeichnen.

In der selben Weise kann man die übrigen Tensoren beschreiben. Wir überlassen es dem Leser als Übung.

Wir schließen dieses Kapitel mit einem wichtigen Beispiel des Vektors, dessen Transformationsregel nicht durch die Regel (2.6) gegeben ist. Solche Vektoren nennt man **nicht materiell**.

Wir betrachten zwei Familien der Kurven $\{C_0^{(1)}\}$ und $\{C_0^{(2)}\}$, die eine Fläche S_0 erzeugen (Abb. 2.4). Auf einer gewählten Stelle bilden wir ein Vektorprodukt der Tangentenvektoren $T^{(1)}$ und $T^{(2)}$

$$N = T^{(1)} \times T^{(2)}. \quad (2.51)$$

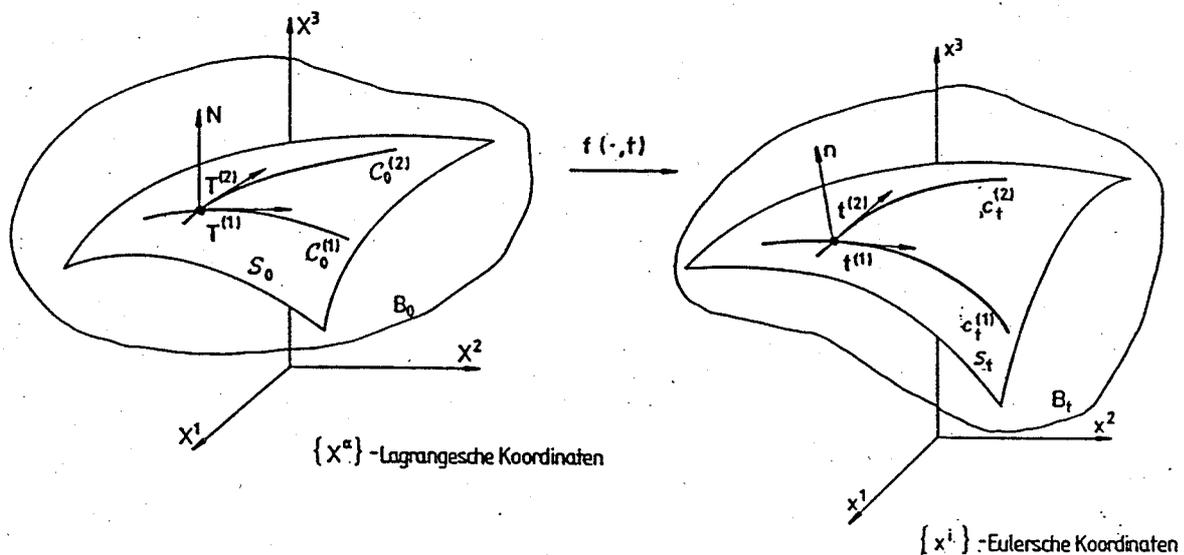


Abb. 2.4: Transformation des nicht-materiellen Vektors

Der Vektor N ist offensichtlich senkrecht zur Fläche S_0 . Wir behandeln jetzt die Abbildung dieser Fläche, induziert durch die Bewegungsfunktion $f(\cdot, t)$ mit der Voraussetzung, daß die Familien der Kurven $C_0^{(1)}$ und $C_0^{(2)}$ **materiell** sind. Dann gilt

$$t^{(1)} = FT^{(1)}, \quad t^{(2)} = FT^{(2)}, \quad (2.52)$$

und die Abbildung des Vektors N folgt

$$n = t^{(1)} \times t^{(2)} = (FT^{(1)}) \times (FT^{(2)}). \quad (2.53)$$

Die Auswertung dieser Regel ist einfacher in einem bestimmten Koordinatensystem. Wir benutzen wieder die rechtwinklig-kartesische Koordinaten:

$$\{X_\alpha\} - \text{Lagrangesche Koordinaten, } \{x_i\} - \text{Eulersche Koordinaten.} \quad (2.54)$$

Dadurch erhält man

$$\begin{aligned}
 N_\alpha &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} T_\beta^{(1)} T_\gamma^{(2)}, & \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} &= \begin{cases} +1 \text{ für} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ 1 \\ 3 \rightarrow 2 \end{array} \\ -1 \text{ für} & \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ 1 \\ 3 \rightarrow 2 \end{array} \\ 0 \text{ ansonsten,} & & \\ +1 \text{ für} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ 1 \\ 3 \rightarrow 2 \end{array} \\ -1 \text{ für} & \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ 1 \\ 3 \rightarrow 2 \end{array} \\ 0 \text{ ansonsten.} & & \end{cases} \quad (2.55) \\
 n_k &= \varepsilon_{klm} (F_{l\alpha} T_\alpha^{(1)}) (F_{m\beta} T_\beta^{(2)}), & \varepsilon_{klm} &= \begin{cases} +1 \text{ für} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ 1 \\ 3 \rightarrow 2 \end{array} \\ -1 \text{ für} & \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ 1 \\ 3 \rightarrow 2 \end{array} \\ 0 \text{ ansonsten.} & & \end{cases}
 \end{aligned}$$

Die letzte Formel kann man folgendermaßen umschreiben

$$\begin{aligned}
 n_k &= \varepsilon_{nlm} F_{n\gamma} F_{l\alpha} F_{m\beta} F_{\gamma k}^{-1} T_\alpha^{(1)} T_\beta^{(2)} = \\
 &= J \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} F_{\gamma k}^{-1} T_\alpha^{(1)} T_\beta^{(2)} = J F_{\gamma k}^{-1} N_\gamma,
 \end{aligned} \quad (2.56)$$

wobei die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{nlm} F_{n1} F_{l2} F_{m3} &= J \equiv \det F, \\
 \varepsilon_{nlm} F_{n\gamma} F_{l\alpha} F_{m\beta} &= J \varepsilon_{\gamma\alpha\beta},
 \end{aligned} \quad (2.57)$$

benutzt werden. Schließlich erhalten wir

$$\boxed{n = J F^{-T} N.} \quad (2.58)$$

Weder N noch n werden normiert. Wir werden weiter eine ähnliche Regel für Einheitsvektoren anwenden. Die Regel (2.58) stimmt offensichtlich mit der Transformationsregel für materielle Vektoren nicht überein.

3 Kinematik

Die bisherigen Überlegungen waren vollständig unabhängig von der Zeit. Nun stellen wir die wichtigsten Begriffe dar, die die Zeitabhängigkeit der Bewegungsfunktion f berücksichtigen.

Die materielle-Lagrangesche Beschreibung der Bewegung

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) \quad \mathbf{x} \in B_t, \quad \mathbf{X} \in B_0 \quad (3.1)$$

verursacht keine wesentlichen Schwierigkeiten. Mit dem folgenden Ansatz

[Die Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{X}, \cdot)$ ist zweimal stetig differenzierbar

kann man die Begriffe der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} := \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(\mathbf{X}, t), \quad (3.2)$$

und der Beschleunigung

$$\mathbf{a} := \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2}(\mathbf{X}, t), \quad (3.3)$$

einführen.

Es ist offensichtlich, daß die Größen \mathbf{v} und \mathbf{a} zeitabhängige Felder auf der B_0 -Menge sind. Physikalisch gesehen hat eine solche Beschreibung den Nachteil, nicht direkt durch Beobachtungen verifizierbar zu sein. Die Beobachtungen wie z. B. die Geschwindigkeitsmessungen werden nur im Bewegungsraum gemacht. Das bedeutet, daß wir zwei wichtige Fragen beantworten müssen:

1. Wie reagiert die Bewegungsbeschreibung auf eine Transformation der Referenzkonfiguration, insbesondere wenn die neue Konfiguration mit der augenblicklichen Konfiguration identisch ist;
2. Wie reagiert die Bewegungsbeschreibung auf eine Transformation der Beobachter im Bewegungsraum.

Nun wollen wir diese Fragen beantworten.

Nehmen wir an, daß wir die zwei folgenden Konfigurationen betrachten:

$$\xi = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \tau) \quad , \quad \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) \quad , \quad \begin{array}{l} \mathbf{X} \in B_0, \\ \xi \in B_\tau := \mathbf{f}(B_0, \tau), \\ \mathbf{x} \in B_t := \mathbf{f}(B_0, t), \end{array} \quad (3.4)$$

wobei ξ der Ort des Teilchens X im Moment τ und \mathbf{x} der Ort desselben Teilchens im Moment t ist. Offensichtlich kann man den Ort ξ in Bezug auf \mathbf{x} anstatt auf X beschreiben. Dann gilt

$$\xi = f[f^{-1}(\mathbf{x}, t), \tau] = f_t(\mathbf{x}, \tau), \quad (3.5)$$

wobei der Augenblick t als ausgewählt und fixiert zu verstehen ist (Abb. 3.1).

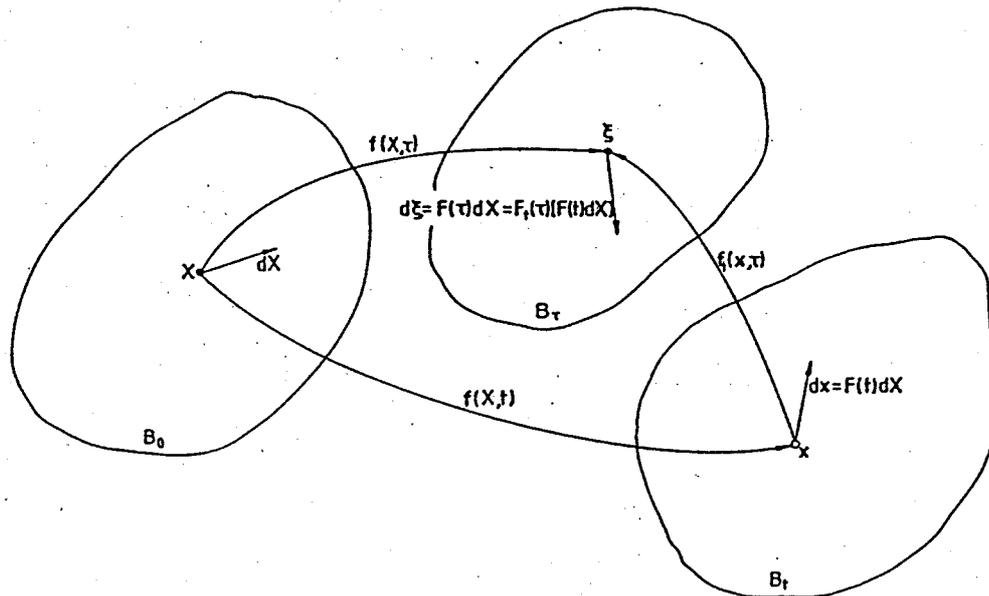


Abb. 3.1: Referenzkonfigurationen

Diese Beschreibung der Bewegung ist besonders vorteilhaft, wenn man die Geschwindigkeit als eine gegebene Funktion \mathbf{v} des Ortes \mathbf{x} und der Zeit t zur Verfügung hat

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} [f^{-1}(\mathbf{x}, t), t] = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (3.6)$$

In diesem Fall gilt nach Gl. (3.5)

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \mathbf{v}(\xi, \tau), \quad (3.7)$$

mit der Bedingung

$$\xi(\mathbf{x}, \tau) \Big|_{\tau=t} = \mathbf{x}. \quad (3.8)$$

Dieses System ist eine Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung (3.8), deren Lösung die Trajektorie des Teilchens rückwärts bestimmt.

Gleichzeitig ermöglicht die Beziehung (3.5), den Deformationsgradienten in der Konfiguration B_0 bezüglich der Konfiguration B_t herauszubekommen. Denn (Abb. 3.1)

$$F(\tau) = \frac{\partial f}{\partial X}(\mathbf{X}, \tau) = \frac{\partial f_t}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial f}{\partial X}(\mathbf{X}, t). \quad (3.9)$$

Es folgt

$$F(\tau) = F_t(\tau)F(t) \quad , \quad F_t(\tau) := \frac{\partial \mathbf{f}_t}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \tau). \quad (3.10)$$

Selbstverständlich gilt

$$F_t(\tau)|_{\tau=t} = \mathbf{I}. \quad (3.11)$$

Von besonderer Bedeutung ist die Zeitänderung des **relativen** Deformationsgradienten $F_t(\tau)$ für die augenblickliche Konfiguration B_t . Wir definieren

$$\dot{F}_t(t) := \partial_\tau F_t(\tau)|_{\tau=t}. \quad (3.12)$$

Nach Definition (3.10) erhalten wir

$$\dot{F}_t(t) = \frac{\partial^2 \mathbf{f}_t}{\partial \tau \partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \tau)|_{\tau=t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \text{grad } \mathbf{v}. \quad (3.13)$$

Das heißt, daß die Zeitableitung des relativen Deformationsgradienten bezogen auf die augenblickliche Konfiguration B_t den räumlichen Gradienten der Geschwindigkeit wiedergibt. Wie man (3.10) entnimmt, gilt außerdem

$$L := \text{grad } \mathbf{v} = \dot{F}(t)F^{-1}(t). \quad (3.14)$$

Üblicherweise wird der Geschwindigkeitsgradient L in den symmetrischen Anteil D und den schiefsymmetrischen Anteil W zerlegt (**Euler-Cauchy-Stokes-Zerlegung**)

$$L = D + W \quad , \quad D := \frac{1}{2}(L + L^T) \quad , \quad W := \frac{1}{2}(L - L^T) \quad (3.15)$$

Der Tensor D wird der **Verzerrungsgeschwindigkeitstensor** genannt und der Tensor W der **Spin**. Zur Interpretation dieser Tensoren betrachten wir weiter ein Beispiel. Man kann aber auch unmittelbar aus der polaren Zerlegung veranschaulichen, welche kinematische Bedeutung diese zwei Tensoren haben. Es gilt

$$L = (RU) \cdot (RU)^{-1} = (\dot{R}U + R\dot{U})U^{-1}R^T = \dot{R}R^T + R\dot{U}U^{-1}R^T \quad (3.16)$$

und außerdem

$$(\dot{R}R^T) \cdot = \mathbf{o} = \dot{R}R^T + R\dot{R}^T \Rightarrow (\dot{R}R^T)^T = R\dot{R}^T = -\dot{R}R^T. \quad (3.17)$$

Nach Gl. (3.15) gilt nun

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}R(\dot{U}U^{-1} + U^{-1}\dot{U})R^T, \\ W &= \Omega + \frac{1}{2}R(\dot{U}U^{-1} - U^{-1}\dot{U})R^T, \quad \Omega := \dot{R}R^T = -\Omega^T. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Das bedeutet, daß die Verzerrungsgeschwindigkeit D wirklich nur mit der Zeitänderung des Streck-Tensors U zusammenhängt und der Spin W als eine Überlagerung der starren Drehgeschwindigkeit $\Omega = \dot{R}R^T$ und der Drehung durch die Verformung verursacht (das zweite Glied auf der rechten Seite von Gl. (3.18)₂) herauskommt.

Der Spin als ein schiefsymmetrischer Tensor kann man auch mit Hilfe eines Vektors ω darstellen. In kartesischen Koordinaten ergibt sich

$$\omega_k := \frac{1}{2} \varepsilon_{klm} W_{lm} \Rightarrow W_{kl} = \varepsilon_{klm} \omega_m. \quad (3.19)$$

Der Vektor ω wird der **Wirbel** genannt und häufig auf dem Gebiet der Strömungsmechanik angewendet. Da W ein schiefsymmetrischer Anteil des Geschwindigkeitsgradienten ist, folgt nach (3.9)

$$\omega = \frac{1}{2} \nabla \times v, \quad \nabla := \text{grad.} \quad (3.20)$$

Der Begriff des Wirbels wird bei uns nicht weiter benutzt.

Als Beispiel berechnen wir die obigen Größen für den Fall der einfachen Scherung (siehe: Kapitel 2, (2.22)). Der Drehwinkel φ wird als eine vorgegebene Funktion der Zeit betrachtet. Dann ist

$$L := \dot{F}F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\tan \varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

wobei

$$\dot{\varphi} := \frac{d\varphi}{dt}. \quad (3.22)$$

Nach einfacher Rechnung erhalten wir

$$D = \frac{1}{2} \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \frac{1}{2} \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

$$\Omega = 2 \frac{\dot{\varphi}}{1+3\cos^2 \varphi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\omega = \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi}, 0, 0 \right).$$

Andererseits wird die Zeitableitung des Rechts-Cauchy-Green-Tensors durch die folgende Formel gegeben

$$\frac{dC}{dt} \equiv \dot{C} = 2F^T D F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi} \\ 0 & \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi} & 2 \frac{\dot{\varphi} \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Offensichtlich ist weder die Ableitung \dot{C} noch die Ableitung irgendwelcher anderer Verzerrungstensen identisch mit dem Verzerrungsgeschwindigkeitstensor D . In diesem

Sinne ist der Name des Tensors D irreführend. Nur im Fall einer **kleinen Verformung** ($\varphi \approx \sin \varphi$) sind die Tensoren D und \dot{C} gleich. Es gilt dann

$$D \approx \frac{1}{2} \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad W \approx \Omega \approx \frac{1}{2} \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}, 0, 0 \right). \quad (3.25)$$

Wir schließen die kinematischen Überlegungen mit einigen Bemerkungen zu den Transformationseigenschaften der obigen Vektoren und Tensoren. Die grundlegenden Gleichungen der Kontinuumsmechanik werden in einem inertiellen Koordinatensystem formuliert. Es ist freilich nicht immer günstig, in solchen Systemen die Probleme zu lösen. Folglich brauchen wir Transformationsregeln für den Fall der Änderung des globalen Beobachters in dem Bewegungsraum, dessen Bewegungsbeobachtungen die folgenden Regeln erfüllen:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{O}^* \mathbf{x} + \mathbf{c}^*, \quad \mathbf{O}^* = \mathbf{O}^*(t), \quad \mathbf{O}^{*T} = \mathbf{O}^{*-1}, \quad \mathbf{c}^* = \mathbf{c}^*(t). \quad (3.26)$$

Ähnlich wie in der klassischen Dynamik der starren Körper kann man die Regel (3.26) entweder als die zusätzliche **starre** Bewegung des Körpers in einem ausgewählten Koordinatensystem oder auch als die Beschreibung derselben Bewegung in zwei verschiedenen Koordinatensystemen betrachten. Wir benutzen die zweite Interpretation.

Die orthogonale Matrix \mathbf{O}^* wird die **Drehmatrix** genannt. Wir nehmen an, daß sie **eigentlich** orthogonal ist, d. h.

$$\det \mathbf{O}^* = 1. \quad (3.27)$$

Der Vektor \mathbf{c}^* gibt die relative Translationsbewegung der beiden Bezugssysteme an. Nach einfacher Rechnung gelangt man zu folgenden Ergebnissen für Transformationsregeln des Deformationsgradienten und der Verzerrungstensoren

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^* &= \mathbf{O}^* \mathbf{F}, & \mathbf{R}^* &= \mathbf{O}^* \mathbf{R}, & \mathbf{U}^* &= \mathbf{U}, & \mathbf{V}^* &= \mathbf{O}^* \mathbf{V} \mathbf{O}^{*T}, \\ \mathbf{C}^* &= \mathbf{C}, & \mathbf{E}^* &= \mathbf{E}, & \mathbf{B}^* &= \mathbf{O}^* \mathbf{B} \mathbf{O}^{*T}, & \mathbf{e}^* &= \mathbf{O}^* \mathbf{e} \mathbf{O}^{*T}, \text{ usw.} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Viel interessanter transformieren sich die Zeitableitungen. Für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^* &= \mathbf{O}^* \mathbf{v} + \dot{\mathbf{O}}^* \mathbf{x} + \dot{\mathbf{c}}^* \\ \mathbf{a}^* &= \mathbf{O}^* \mathbf{a} + 2\dot{\mathbf{O}}^* \mathbf{v} + \ddot{\mathbf{O}}^* \mathbf{x} + \ddot{\mathbf{c}}^*, \end{aligned} \quad (3.29)$$

oder bezüglich des neuen Systems:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}^* \mathbf{v} &= \mathbf{v}^* - \dot{\Omega}^* (\mathbf{x}^* - \mathbf{c}^*) - \dot{\mathbf{c}}^*, \\ \mathbf{O}^* \mathbf{a} &= \mathbf{a}^* - 2\dot{\Omega}^* (\mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{c}}^*) + \Omega^{*2} (\mathbf{x}^* - \mathbf{c}^*) - \ddot{\Omega}^* (\mathbf{x}^* - \mathbf{c}^*) - \ddot{\mathbf{c}}^*, \\ \dot{\Omega}^* &:= \dot{\mathbf{O}}^* \mathbf{O}^{*T} = -\dot{\Omega}^{*T}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Offensichtlich wird das zweite Glied auf der rechten Seite der Transformationsregel für die Geschwindigkeit die **relative Drehgeschwindigkeit** genannt und das dritte die **relative Geschwindigkeit der Translation**. Die Regel für die Beschleunigung enthält die folgenden zusätzlichen Glieder

- $-2\Omega^*(v^* - \dot{c}^*)$ - Coriolische Beschleunigung,
- $\Omega^{*2}(x^* - c^*)$ - Zentrifugale Beschleunigung,
- $\dot{\Omega}^*(x^* - c^*)$ - Eulersche Beschleunigung,
- \ddot{c}^* - relative Beschleunigung der Translation.

Die Matrix Ω^* gibt die Winkelgeschwindigkeit der relativen Bewegung der Bezugssysteme wieder.

Die wichtigste Eigenschaft der Regeln (3.30) ist die nicht-homogene Abhängigkeit der Geschwindigkeit und der Beschleunigung vom Bezugssystem.

Ähnlich läßt sich die Regel für den Geschwindigkeitsgradient darstellen. Wir erhalten

$$O^*LO^{*T} = L^* - \Omega^* \quad (3.31)$$

und folglich

$$\begin{aligned} O^*DO^{*T} &= D^* \\ O^*WO^{*T} &= W^* - \Omega^* \end{aligned} \quad (3.32)$$

Die Anwesenheit der Winkelgeschwindigkeit Ω^* in den Transformationsregeln hat gravierende Folgen für die Formulierung der Werkstoffgesetze. Wir erörtern dieses Problem weiter mit einigen Einzelheiten. Manchmal werden die Größen, wie z.B. D , mit homogener Transformationsregel objektiv und andere, wie L oder W , nicht-objektiv genannt.

Kompendium der Geometrie und Kinematik

	$\{X_\alpha\}_{\alpha=1,2,3}$ - Lagrangesche Koordinaten $\{x_k\}_{k=1,2,3}$ - Eulersche Koordinaten
Bewegungsfunktion	
$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t), \mathbf{x} \in B_t, \mathbf{X} \in B_0;$	$x_k = f_k(X_1, X_2, X_3, t), k = 1, 2, 3$
Deformationsgradient	
$F = \text{Grad } \mathbf{f} \equiv \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}, t),$ $J = \det F > 0$	$F_{k\alpha} = \frac{\partial f_k}{\partial X_\alpha}, J = \frac{1}{6} \varepsilon_{klm} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} F_{k\alpha} F_{l\beta} F_{m\gamma}$
Polare Zerlegung	
$F = RU = VR, R^T = R^{-1},$ $U = U^T, V = V^T$	$F_{k\alpha} = R_{k\beta} U_{\beta\alpha} = V_{kl} R_{l\alpha}$
Verzerrungstensoren	
$C = F^T F = U^2$ - Rechts-Cauchy-Green $E = \frac{1}{2}(C - I)$ - Green-St.Venant $B = FF^T = V^2$ - Links-Cauchy-Green $e = \frac{1}{2}(I - c)$ $\equiv \frac{1}{2}(I - B^{-1})$ - Almási-Hamel	$C_{\alpha\beta} = F_{k\alpha} F_{k\beta} = U_{\alpha\gamma} U_{\gamma\beta}$ $E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(C_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta})$ $B_{kl} = F_{k\alpha} F_{l\alpha} = V_{km} V_{ml}$ $e_{kl} = \frac{1}{2}(\delta_{kl} - B_{kl}^{-1})$
Geschwindigkeit, Beschleunigung	
$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(\mathbf{X}, t), \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2}(\mathbf{X}, t)$	$v_k = \frac{\partial f_k}{\partial t}, a_k = \frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2}$
Geschwindigkeitsgradient	
$L = L(\mathbf{x}, t) = \dot{F}F^{-1} = \text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$	$L_{kl} = \dot{F}_{k\alpha} F_{\alpha l}^{-1} = \frac{\partial v_k}{\partial x_l}$
Verzerrungsgeschwindigkeitstensor	
$D = \frac{1}{2}(L + L^T)$	$D_{kl} = \frac{1}{2}(L_{kl} + L_{lk})$
Spin	
$W = \frac{1}{2}(L - L^T)$	$W_{kl} = \frac{1}{2}(L_{kl} - L_{lk})$

4 Bilanzgleichungen

4.1 Einführung

Die bisherigen Darlegungen beweisen eindeutig, daß sich alle Begriffe der Geometrie und Kinematik aus der Bewegungsfunktion f allein herleiten lassen. Der übrige Teil dieser Abhandlung enthält die Beschäftigung mit der Frage, wie man diese Funktion bestimmen kann. Es bieten sich drei Möglichkeiten:

1. durch Symmetriaussagen und physikalische Eigenschaften des Körpers wird die Gestalt der Funktion f a priori angenommen;
2. man stellt die Funktion f mit Hilfe einiger Parameter dar, deren Raum- und Zeiteigenschaften einfacher sind als die der allgemeinen Bewegungsfunktion selbst und sucht diese Parameter als eine Lösung des Rand- und Anfangswertproblems der bis jetzt unbekanntten Feldgleichungen;
3. man bestimmt die Bewegungsfunktion direkt als die Lösung der entsprechenden Feldgleichungen mit dem zugehörigen Rand- und Anfangswertproblem.

In jedem Fall muß man die thermodynamischen Beschränkungen erfüllen, die die Form der Erhaltungssätze der Masse, des Impulses und der Energie sowie des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik haben.

Zum Beispiel ist die isochore Streckung ein Problem, das entweder mit dem bekannten Parameter λ (die vorgegebene Verformung in einer harten Zugprüfmaschine) zur ersten Klasse gehört oder mit einem unbekanntem Parameter λ (die vorgegebene Belastung in einer

weichen Zugprüfmaschine) zur zweiten Klasse gehört. Ähnlich gehört die einfache Scherung entweder zur ersten oder zur zweiten Klasse, je nachdem, ob der Winkel φ eine bekannte oder unbekannte Größe ist.

Diese zwei Möglichkeiten werden auch sehr häufig in der Strömungsmechanik angewendet. Solche Probleme, wie z.B. Poiseuille- oder Couetteströmungen stellen typische Beispiele dar.

Die Zwangsbedingung, die thermodynamischen Beschränkungen erfüllen zu müssen, wurde in der Kontinuumsmechanik für die Entwicklung einer bestimmten Strategie ausgenutzt. Infolgedessen ist ein Verfahren entstanden, daß die wesentlichen Schritte enthält:

1. die Formulierung der allgemeinen **Erhaltungssätze**, die von beliebigen Prozessen erfüllt sein müssen,

2. die Ergänzung der Erhaltungssätze mit **Werkstoffgesetzen** und folglich die Umwandlung dieser Sätze in die **Feldgleichungen**,
3. die **Lösung** des Rand- und Anfangswertproblems für die Feldgleichungen,
4. die Überprüfung des **zweiten Hauptsatzes** der Thermodynamik.

Alle weiteren Überlegungen dieses Skriptes werden dieser Strategie gewidmet. In diesem Kapitel stellen wir die Bilanzgleichungen und die resultierenden Erhaltungssätze dar.

4.2 Bilanz der Masse

Wir haben schon betont, daß das einzelne Teilchen keine selbständige physikalische Bedeutung im Rahmen der Kontinuumsmechanik besitzt. Die eigentlichen Träger des physikalischen Inhalts sind statt dessen die **Teilkörper** $P_0 \subset B_0$. Die Teilkörper sind die offenen Mengen, die zusätzlich gewisse mathematische Bedingungen erfüllen müssen. Wir wollen hier diese mathematischen Einzelheiten nicht erörtern und werden weiter annehmen, daß die Bedingungen für P_0 , die notwendig für die Zulässigkeit der durchgeführten Operationen sind, gewährleistet werden. Die augenblickliche Konfiguration P_t des Teilkörpers P_0 wird durch die Formel definiert

$$P_t := \{f(\mathbf{X}, t) | \mathbf{X} \in P_0\} \equiv f(P_0, t). \quad (4.1)$$

Mit jedem Teilkörper P_0 verbinden wir eine **positive** Zahl $M(P_0)$, die die folgende Bedingung erfüllt

$$\begin{aligned} 1) \quad P_0 = \emptyset &\Rightarrow M(\emptyset) = 0, \\ 2) \quad P_0 = \bigcup_{\lambda} P_0^{\lambda} \text{ und } P_0^{\lambda_1} \cap P_0^{\lambda_2} = \emptyset \text{ für } \lambda_1 \neq \lambda_2 &\Rightarrow M(P_0) = \sum_{\lambda} M(P_0^{\lambda}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die letzte Eigenschaft nennt man die **Additivität**. Diese Zahl werden wir die **Masse** des Teilkörpers nennen. Sie soll zwei wichtige Ansätze erfüllen. Der Ansatz der **Volumenkontinuität**

$$\exists \mu > 0 \forall P_0 : M(P_0) \leq \mu V(P_0), \quad 0 < \mu < \infty, \quad (4.3)$$

mit $V(P_0)$ — Volumen des Teilkörpers P_0 , μ — eine Konstante, ist ein Beispiel dafür, wie man die sogenannte **axiomatische Kontinuumsmechanik** aufbaut. Ähnliche Ansätze sollten auch von vielen anderen Größen (Impuls, Energie usw.) erfüllt werden. Jedoch wollen wir nicht weiter auf Einzelheiten eingehen.

Nach dem Ansatz der Volumenskontinuität kann die Masse als ein Volumenintegral geschrieben werden

$$\forall P_0 \subset B_0 : M(P_0) = \int_{P_0} \rho_0 dV_0, \quad \rho_0 = \rho_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in B_0, \quad (4.4)$$

wobei ρ_0 die Massendichte in der Referenzkonfiguration ist.

Der zweite Ansatz —der Massenerhaltungssatz— enthält zwei Teile:

1. die augenblickliche Konfiguration P_t des Teilkörpers P_0 wird auch mit einer Masse $M(P_t)$ verbunden,
2. diese Masse ändert sich nicht in der Bewegung und ist eine differenzierbare Funktion der Zeit:

$$M(P_0) = M(P_t) \Rightarrow \frac{dM}{dt}(P_t) = 0. \quad (4.5)$$

Eine einfache Analyse führt dann zu der folgenden globalen Massenbilanzgleichung für einen beliebigen Augenblick t

$$\forall P_t: \frac{d}{dt} \int_{P_t} \rho dV = 0, \quad \rho = \rho(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in B_t \quad (4.6)$$

wobei ρ die Massendichte in der augenblicklichen Konfiguration ist.

An dieser Stelle sollen zwei Bemerkungen gemacht werden. Die erste Bemerkung betrifft die Terminologie: Im Fall der Massenbilanz, die wir hier untersuchen, entsteht kein Unterschied zwischen **Erhaltung** und **Bilanz**. Wir werden weiter sehen, daß das nicht immer der Fall ist. Es gibt Größen wie z. B. die Entropie, die eine Bilanzgleichung erfüllen, jedoch nicht erhalten werden.

Die zweite Bemerkung betrifft die Massenerhaltung selbst. Es ist selbstverständlich, daß im Rahmen der klassischen Mechanik in einem gegebenen System die **vollständige** Masse weder wächst noch verschwindet. Dennoch kann im Fall einer vielkomponentigen Mischung die Masse einiger Komponenten durch die Umwandlung (z. B. chemische Reaktionen) auf Kosten anderer Komponenten wachsen. Wir werden solche Modelle in dieser Abhandlung nicht erörtern.

Mit Hilfe der Analysis kann man die Gl. (4.6) in der folgenden Weise transformieren. Wir schreiben diese Gleichung in der ursprünglichen Form der Zeitableitung

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{P_{t+\Delta t}} \rho(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \int_{P_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV \right\} = 0.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{P_{t+\Delta t}} [\rho(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \rho(\mathbf{x}, t)] dV + \left[\int_{P_{t+\Delta t}} \rho(\mathbf{x}, t) dV - \int_{P_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV \right] \right\} = \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{P_{t+\Delta t}} \frac{\rho(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \rho(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \oint_{\partial P_t} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{\Delta \xi}{\Delta t} ds = \\ & = \int_{P_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{\partial P_t} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

wobei ∂P_t die Oberfläche der Teilkörperkonfiguration P_t und \mathbf{n} den Einheitsvektor senk-

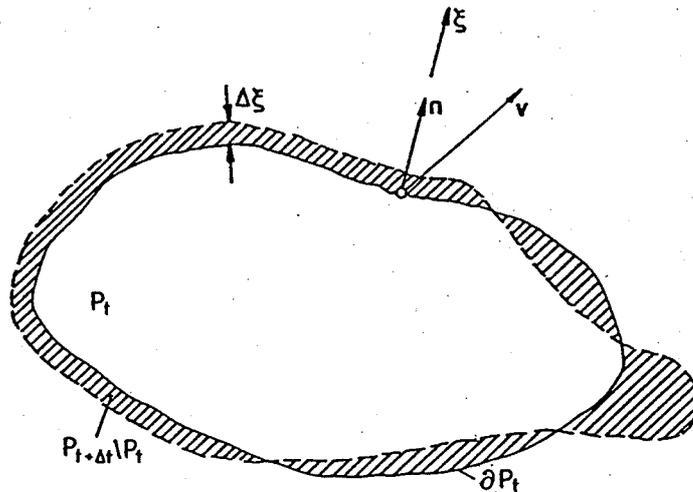


Abb. 4.1: Die Zeitänderung der Konfiguration P_t des Materialgebietes.

recht zur Oberfläche und bezüglich P_t nach außen orientiert bezeichnen. ξ ist eine lokale Koordinate in Richtung des Vektors \mathbf{n} , die die Entfernung von der Fläche ∂P_t bestimmt, \mathbf{v} ist die Geschwindigkeit des Teilchens auf der Fläche ∂P_t . Die Zusammenhänge wurden in Abbildung 4.1 skizziert. Offensichtlich stimmt die Bruchzahl $\frac{\Delta \xi}{\Delta t}$ in der Grenze $\Delta t \rightarrow 0$ mit der Größe $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ deswegen überein, weil das Gebiet P_t sich zusammen mit dem Material (Materialgebiet) bewegt.

Mit Hilfe der Greenschen Formel läßt sich die letzte Beziehung folgendermaßen schreiben

$$\int_{P_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0, \quad (4.8)$$

für beliebige Teilkörper P_0 .

Die letzte Bemerkung hat eine besondere Bedeutung. Es ist nämlich mit Hilfe dieser Eigenschaft möglich, die lokale Gestalt dieser Gleichung zu erhalten. Für ein gewähltes Teilchen $X \in B_0$ betrachten wir die folgende Familie der Teilkörper, die mit der Zahl λ parametrisiert ist

$$\begin{aligned} \{P_0^\lambda\}: \quad & 1) \quad \forall 1 \leq \lambda < \infty : P_0^\lambda \ni X, \\ & 2) \quad \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow P_0^{\lambda_1} \supset P_0^{\lambda_2}, \\ & 3) \quad \bigcap_{\lambda=1}^{\infty} P_0^\lambda = \{X\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Infolge der Stetigkeit der Bewegungsfunktion erhalten wir

$$\begin{aligned} \{P_t^\lambda\}: \quad & 1) \quad \forall 0 < \lambda < \infty : P_t^\lambda \ni \mathbf{f}(X, t), \\ & 2) \quad \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow P_t^{\lambda_1} \supset P_t^{\lambda_2}, \\ & 3) \quad \bigcap_{\lambda=1}^{\infty} P_t^\lambda = \{\mathbf{x}\} \equiv \{\mathbf{f}(X, t)\}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

mit

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} V(P_t^\lambda) = 0. \quad (4.11)$$

Die Gl. (4.8) läßt sich jetzt wie folgt schreiben:

$$\forall \lambda: \frac{1}{V(P_t^\lambda)} \int_{P_t^\lambda} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0 \quad (4.12)$$

und für jeden Ort \mathbf{x} , wo der Integrand stetig ist, erhalten wir

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{V(P_t^\lambda)} \int_{P_t^\lambda} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}), \quad (4.13)$$

was gemeinsam mit (4.12) den **lokalen Massenerhaltungssatz** (die lokale Bilanzgleichung) ergibt

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \equiv \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \dot{\rho} := \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho,} \quad (4.14)$$

wobei die Zeitableitung $\dot{\rho}$ die **materielle Zeitableitung** genannt wird.

Die Gl. (4.14) läßt sich einfach integrieren. Wir zeigen hier zwei Methoden:

1. Es gilt die folgende Identität

$$J = \det \mathbf{F} \Rightarrow \dot{J} = \operatorname{sp} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} \dot{\mathbf{F}}^T = \operatorname{sp} (\mathbf{F}^{-T} J) \dot{\mathbf{F}}^T = J \operatorname{sp} \mathbf{L} = J \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (4.15)$$

Nach (4.14) erhalten wir

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{\dot{J}}{J} \Rightarrow \ln \rho = \operatorname{const} - \ln J, \quad (4.16)$$

mit der Anfangsbedingung

$$J = 1 \Rightarrow \rho = \rho_0. \quad (4.17)$$

Daher wird

$$\boxed{\rho = \frac{\rho_0}{J},} \quad (4.18)$$

was bedeutet, daß der gegebene Deformationsgradient \mathbf{F} die Änderung der Massendichte ρ eindeutig bestimmt. Diese Lösung zeigt auch, daß J **positiv** sein muß.

2. man kann auch direkt die Annahme (4.5)₁ benutzen. Wenn wir die Beziehung (4.4) berücksichtigen, erhalten wir

$$\int_{P_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{P_0} \rho(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t) J dV_0 = \int_{P_0} \rho_0(\mathbf{X}) dV_0 \quad (4.19)$$

wobei dV und dV_0 auf die Integrierung bezüglich \mathbf{x} bzw. \mathbf{X} deuten. Diese Gleichung soll für alle Teilkörper gelten. Deswegen folgt wieder (4.18).

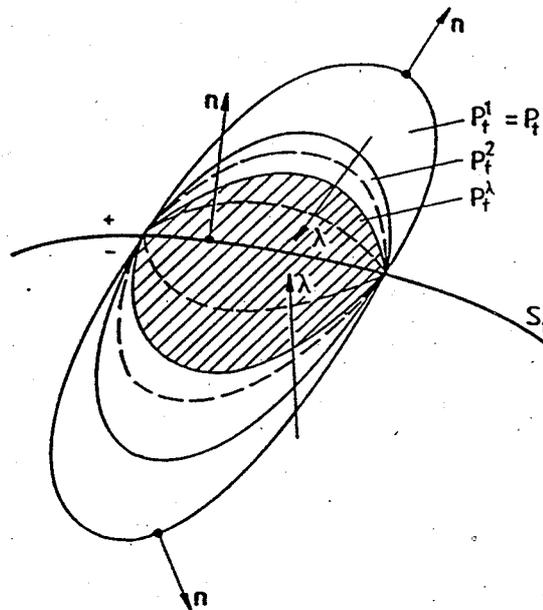


Abb. 4.2: Absteigende Familie der Teilkörper für die singuläre Fläche S_t .

Wir schließen die Analyse der Massenbilanz mit der Erörterung der Bedingungen auf einer **singulären Fläche** S_t , wo die Massendichte ρ unstetig ist. Die globale Massenbilanzgleichung (4.6) gilt auch in diesem Fall, wenn das Gebiet P_t die Fläche S_t schneidet (Abb. 4.2).

Im allgemeinen werden Unstetigkeiten in der globalen Bilanzgleichung zulässig, wenn das Volumen solcher Mengen, die aus den Unstetigkeitsstellen entstehen, gleich Null ist.

Nehmen wir an, daß die Gleichung der Fläche S_t die folgende Gestalt hat

$$h(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4.20)$$

wobei h eine stetig differenzierbare Funktion bezeichnet. Gl. (4.20) erlaubt die lokale Geschwindigkeit der Fläche zu erhalten. Denn

$$dh = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} + \frac{\partial h}{\partial t} dt \equiv 0; \quad (4.21)$$

daraus folgt

$$c := \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = - \frac{\frac{\partial h}{\partial t}}{\left| \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|}, \quad \mathbf{n} := \frac{\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}}{\left| \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|}, \quad (4.22)$$

wobei \mathbf{n} den orthogonalen Einheitsvektor bezeichnet. Offenkundig ergibt sich aus (4.20) nur die normale Komponente c der Geschwindigkeit. Die Tangentialkomponente ändert die Flächengeometrie nicht und hat deswegen keine Bedeutung für unsere Überlegungen. Wir untersuchen wieder die Bilanzgleichung (4.6) für die Familie der Teilkörper $\{P_t^\lambda\}$,

die die folgende Eigenschaft besitzt (Abb. 4.2):

$$\begin{aligned} 1) \quad & \forall 1 \leq \lambda_1, \lambda_2 < \infty : P_t^{\lambda_1} \cap S_t = P_t^{\lambda_2} \cap S_t, \\ 2) \quad & \bigcap_{\lambda=1}^{\infty} P_t^\lambda = P_t^1 \cap S_t \equiv P_t \cap S_t. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Um die Unstetigkeit berücksichtigen zu können, zerlegen wir die Integration für beliebige P_t in zwei Teile:

$$\int_{P_t} \rho dV = \int_{P_t^+} \rho dV + \int_{P_t^-} \rho dV \quad (4.24)$$

wobei P_t^+ und P_t^- die augenblicklichen Konfigurationen der Teilkörper bezeichnen, die durch den Schnitt des Teilkörpers P_t mit S_t entstehen. Dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{P_t^+} \rho dV &= \int_{P_t^+} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\partial P_t^+ \setminus S_t} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\partial P_t^+ \cap S_t} \rho^+ (-\mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n}c) dS, \\ \frac{d}{dt} \int_{P_t^-} \rho dV &= \int_{P_t^-} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\partial P_t^- \setminus S_t} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\partial P_t^- \cap S_t} \rho^- (\mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n}c) dS. \end{aligned} \quad (4.25)$$

wobei ρ^+ und ρ^- die Grenzwerte der Massendichte auf den beiden Seiten der Fläche S_t bezeichnen.

Mit Hilfe der Familie (4.23) kann man jetzt einen Grenzübergang konstruieren:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \int_{P_t^\lambda} \rho dV &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{P_t^\lambda} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{P_t \cap S_t} \rho^+ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^+ - c) dS - \\ &- \int_{P_t \cap S_t} \rho^- (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^- - c) dS, \end{aligned} \quad (4.26)$$

wobei \mathbf{v}^+ und \mathbf{v}^- die Grenzwerte der Geschwindigkeit sind.

Nach (4.6) folgt nun

$$\int_{P_t \cap S_t} [\rho^+ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^+ - c) - \rho^- (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^- - c)] dS = 0. \quad (4.27)$$

Für jeden Ort $\mathbf{x} \in S_t$, bei dem der Integrand stetig ist, läßt sich diese Gleichung in der lokalen Gestalt schreiben:

$$\boxed{[\rho(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} - c)] = 0,} \quad (4.28)$$

wobei $[\cdot]$ die Differenz der Grenzen auf der „+“-Seite und „-“-Seite der Fläche bezeichnet.

Im Sonderfall der materiellen Fläche haben wir

$$c = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \Rightarrow \llbracket \rho(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} - c) \rrbracket \equiv 0; \quad (4.29)$$

das bedeutet, daß beispielsweise die Grenze zweier Werkstoffe identisch die Massenbilanzgleichung (4.28) erfüllt. Dennoch erfüllen solche Flächen, wie z.B. die Stoßwellenfläche oder die Trennfläche zweier Phasen während der Phasenumwandlung, diese Gleichung nicht automatisch. Es folgt z.B. im Fall $\rho^+ \neq \rho^-$

$$c = \frac{\rho^-}{\rho^+ - \rho^-}(\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-) \cdot \mathbf{n} \equiv \frac{\rho^-}{\llbracket \rho \rrbracket} \llbracket \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rrbracket \quad (4.30)$$

d. h. die Unstetigkeiten der Massendichte $\llbracket \rho \rrbracket$ und der Normalgeschwindigkeit $\llbracket \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rrbracket$ bestimmen die Ausbreitungsgeschwindigkeit c .

Gl. (4.28) hat eine sehr einfache physikalische Bedeutung. Der Beobachter, der sich zusammen mit der Fläche bewegt, beobachtet den Zufluß und den Abfluß der Masse pro Zeiteinheit als $\rho^+(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - c)$ und $\rho^-(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - c)$. Diese Größen müssen gleich sein. Das bedeutet, daß die Masse von der Fläche nicht abgefangen wird — der Massenstrom durch die Fläche muß stetig werden.

4.3 Impulsbilanz

Der Impulsvektor \mathbf{I} für den Teilkörper P_t wird durch die Formel

$$\mathbf{I} = \int_{P_t} \rho \mathbf{v} dV, \quad (4.31)$$

definiert. Wir verzichten sowohl hier als auch weiterhin, für andere Größen, auf die axiomatische Formulierung, die mit einigen Einzelheiten für die Massendichte dargestellt wurde.

Im Gegensatz zur Masse bleibt der Impuls meistens nicht erhalten — Der Impulsvektor \mathbf{I} ändert sich durch den Einfluß der Umgebung des Teilkörpers. Wir nehmen an, daß dieser Einfluß durch einen Impulsstrom wiedergegeben wird, der aus zwei Beiträgen entsteht: Der Oberflächenkraft $\mathbf{t}(P_t, t)$ und der Volumenkraft $\mathbf{b}(P_t, t)$. Die Impulsbilanz für den Teilkörper P_t läßt sich dann schreiben

$$\left[\forall P_t : \frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{t}(P_t, t) + \mathbf{b}(P_t, t), \quad (4.32) \right.$$

Die Erhaltung des Impulses ist nur in diesem Sinn zu verstehen, daß der ganze Körper B_0 , der keinen Kontakt mit der äußeren Welt hat, den eigenen Impuls nicht ändern kann.

Die Trennung der Kräfte auf der rechten Seite der Gl. (4.32) ist weder axiomatisch¹ noch physikalisch einfach zu klären. Ohne Einzelheiten zu erwähnen, werden in dieser

¹“Of all the axioms of mechanics, those for systems of forces and torques are the most difficult to formulate”(C. TRUESDELL, The elements of continuum mechanics, Springer, N. Y., 1966, S. 26).

Abhandlung nur solche Kräfte betrachtet, die sich folgendermaßen schreiben lassen:

$$\begin{aligned} t(P_t, t) &= \oint_{\partial P_t} t_n(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) dS, \\ b(P_t, t) &= \int_{P_t} \rho b(\mathbf{x}, t) dS. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Offensichtlich ist die Dichte der Oberflächenkraft $t(P_t, t)$ an jeder Stelle \mathbf{x} nur von der

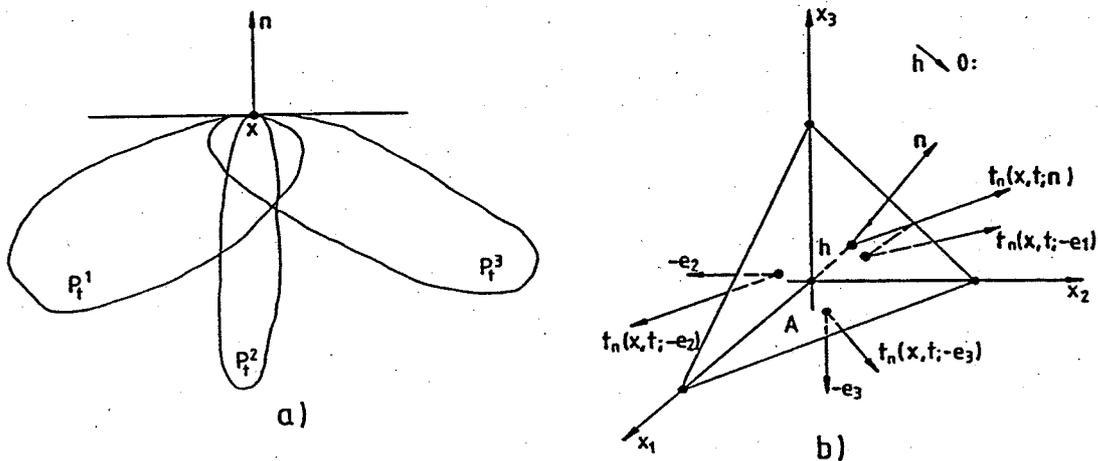


Abb. 4.3: Zur Herleitung des Spannungstensors

Orientierung \mathbf{n} abhängig (Abb. 4.3,a)). Sowohl die anderen geometrischen Parameter wie z. B. Krümmungen als auch die globalen Eigenschaften des Teilkörpers P_t spielen dabei keine Rolle. Die Größe $t_n(\mathbf{x}, t; \mathbf{n})$, die wir weiter den **Spannungsvektor** nennen, ist für alle drei in der Abbildung skizzierten Teilkörper gleich.

Andererseits ist die Dichte $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ der Volumenkraft davon unabhängig, ob es noch andere Teilkörper im Raum gibt, die sich gleichzeitig mit P_t bewegen. Das bedeutet, daß wir solche Wechselwirkungen wie gegenseitige Gravitation vollständig vernachlässigen.

Letztlich erhalten wir die folgende globale Bilanzgleichung

$$\forall P_t: \frac{d}{dt} \int_{P_t} \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV = \oint_{\partial P_t} t_n(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) dS + \int_{P_t} \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV, \quad \mathbf{x} \in B_t. \quad (4.34)$$

Unmittelbar aus dieser Gleichung folgt das **Cauchysche Lemma** über die Existenz des **Spannungstensors** σ :

$$t_n(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) = \sigma(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}, \quad (4.35)$$

d. h., daß der Spannungsvektor t_n eine lineare und homogene Funktion des Vektors n sein muß. Um dieses Lemma zu beweisen, muß man die Gl. (4.34) auf den Tetraeder (Abb. 4.3,b)) anwenden und dann das Volumen auf Null schrumpfen lassen.

Ähnlich wie für die Massenbilanz läßt sich jetzt die linke Seite transformieren

$$\int_{P_t} \frac{\partial \rho v}{\partial t} dV + \oint_{\partial P_t} \rho v v \cdot n dS = \oint_{\partial P_t} \sigma n dS + \int_{P_t} \rho b dV. \quad (4.36)$$

oder, mit Hilfe der Greenschen Formel,²

$$\forall P_t : \int_{P_t} \left[\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) - \operatorname{div} \sigma - \rho b \right] dV = 0. \quad (4.37)$$

Für alle Orte, an denen der Integrand stetig ist, können wir jetzt die Mengenfamilie (4.10) anwenden. Es folgt die lokale Impulsbilanzgleichung (der sogenannte erste Cauchysche Satz der Kontinuumsmechanik)

$$\boxed{\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \otimes v - \sigma) = \rho b.} \quad (4.38)$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe der Massenbilanz vereinfacht werden. Wir haben dann

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) \right) v + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \operatorname{grad})v \right)$$

und, dank der Gl. (4.14),

$$\boxed{\rho \dot{v} = \operatorname{div} \sigma + \rho b, \quad \dot{v} := \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \operatorname{grad})v.} \quad (4.39)$$

Die materielle Zeitableitung der Geschwindigkeit \dot{v} entspricht selbstverständlich der Beschleunigung a in deren Eulerschen Beschreibung.

Im Fall der singulären Fläche S_t (Gl.(4.20)) erhalten wir die folgende Bedingung

$$[[\rho(n \cdot v - c)v]] = [[\sigma]]n. \quad (4.40)$$

Andererseits führt die Kontinuität des Massenflusses (4.28)

$$m := \rho^+(c - v^+ \cdot n) = \rho^-(c - v^- \cdot n) \quad (4.41)$$

²“Textbook for engineers and physicists still seem to prefer proofs of each special application by means of diagrams showing boxes decorated by many small arrows. Such proofs are regarded as ‘intuitive’, apparently because they include, over and over again, a bad proof of the divergence (i. e. Green, K. W.) theorem itself along with the particular application of it.” (C. TRUESDELL, op.cit., S.31)

zu

$$m[[v]] + [[\sigma]]n = 0. \quad (4.42)$$

Diese Gleichung hat zweierlei praktische Bedeutung. Erstens gilt für eine materielle Fläche die Poissonsche Bedingung

$$m \equiv 0 \Rightarrow [[\sigma]]n = 0, \quad (4.43)$$

was die Randbedingung für Spannungen definiert. Ist

$$t_n^{\text{außen}} = \sigma^+ n. \quad (4.44)$$

die gegebene äußere Kraftdichte auf der Fläche S_t , dann verbindet die Gl. (4.43) diese Kraftdichte mit der inneren Spannung $\sigma \equiv \sigma^-$:

$$\sigma n|_{S_t} = t_n^{\text{außen}}. \quad (4.45)$$

Zweitens beweist die Gl. (4.42) für eine nicht-materielle Fläche, daß die Unstetigkeit der Geschwindigkeit $[[v]]$ die Unstetigkeit des Spannungsvektors erzwingt. Diese Bedingung spielt eine sehr wichtige Rolle bei Untersuchung der Stoßwellen.

Beispiel: Ist $\sigma = -p\mathbf{I}$, d. h. der Spannungstensor hat eine diagonale Form und p beschreibt den hydrostatischen Druck. Nehmen wir zusätzlich an, daß sich der Körper auf der positiven Seite der Fläche nicht bewegt: $v^+ \equiv 0$. Dann folgt aus (4.41) und (4.42)

$$c^2 = \frac{\rho^- [[p]]}{\rho^+ [[\rho]]} > 0. \quad (4.46)$$

Wenn der Druck allein eine Funktion von ρ ist, dann bestimmt die Gl. (4.46) die Ausbreitungsgeschwindigkeit für einen gegebenen Sprung der Massendichte. Offensichtlich muß p eine wachsende Funktion von ρ sein, um die Ungleichung (4.46)₂ zu erfüllen.

Wir schließen dieses Kapitel mit einer Darstellung der anderen Spannungstensoren, die aus einer Transformation des Bezugssystems folgen.

Offensichtlich läßt sich die globale Bilanzgleichung (4.34) auch in der Referenzkonfiguration schreiben. Denn

$$\forall P_0 : \frac{d}{dt} \int_{P_0} \rho_0 v(X, t) dV_0 = \oint_{\partial P_0} t_n^0(X, t; N) dS_0 + \int_{P_0} \rho_0 b_0(X, t) dV_0, \quad X \in B_0,$$

oder, nach der Anwendung des Greenschen Satzes,

$$\forall P_0 : \int_{P_0} \left(\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} - \text{Div } \mathbf{T} - \rho_0 b_0 \right) dV_0 = 0.$$

Die lokale Bilanzgleichung lautet dann

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} - \text{Div } T - \rho_0 b_0 = 0, \quad (4.47)$$

wobei wir das Cauchysche Lemma für den Spannungsvektor t_n^0

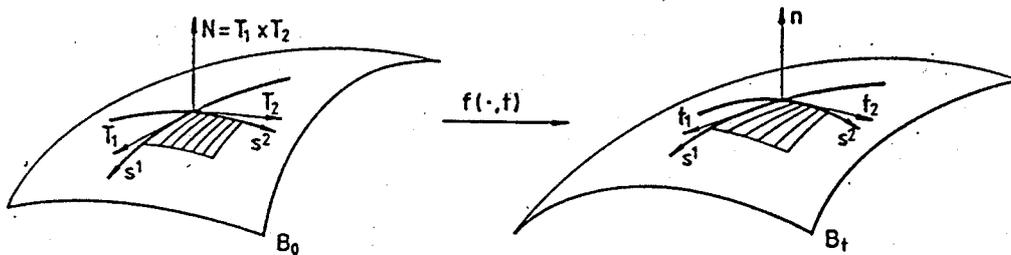
$$t_n^0(X, t; N) = T(X, t) N(X, t), \quad (4.48)$$

benutzt haben. Selbstverständlich bezeichnet t_n^0 die Oberflächenkraft pro Flächeneinheit in der Referenzkonfiguration und b_0 ist die Volumenkraft pro Masseneinheit ebenfalls in der Referenzkonfiguration. Der Tensor T wird der (erste) Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor genannt.

Um den Zusammenhang zwischen Cauchyscher Spannung σ und Piola-Kirchhoffscher Spannung T herauszufinden, transformieren wir die Koordinaten der Flächenintegrale in (4.34):

$$\begin{aligned} \oint_{\partial P_t} t_n dS &= \oint_{\partial P_t} \sigma n dS = \oint_{\partial P_t} \sigma (t_1 ds^1 \times t_2 ds^2) = \\ &= \oint_{\partial P_0} \sigma (FT_1 ds^1) \times (FT_2 ds^2) = \oint_{\partial P_0} J \sigma F^{-T} N dS_0 \end{aligned}$$

(Abb. 4.4 und Gl. (2.58)).



$$\begin{aligned} N dS_0 &= (T_1 ds^1) \times (T_2 ds^2) \\ &= (T_1 \times T_2) ds^1 ds^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n dS &= (t_1 ds^1) \times (t_2 ds^2) = \\ &= (FT_1 ds^1) \times (FT_2 ds^2) = \\ &= J F^{-T} N dS_0 \end{aligned}$$

Abb. 4.4: Transformation des Flächenelementes

Wenn wir nun dieses Ergebnis in der Bilanzgleichung anwenden, erhalten wir die folgende lokale Beziehung

$$T = J \sigma F^{-T}. \quad (4.49)$$

Um den Unterschied zwischen σ und T klar zu sehen, betrachten wir ein **Beispiel**. Nehmen wir an, daß die Messung der Kraft, die notwendig ist, um die isochore Streckung zu verwirklichen (Gl.(2.18)), die folgende Beziehung ergibt:

$$K = (K_1, 0, 0), \quad K_1 = K_0 \varepsilon, \quad \varepsilon := \log \lambda, \quad K_0 = \text{const.} \quad (4.50)$$

Die Cauchysche Spannung auf der Fläche $x = \text{const}$ ist nun

$$\sigma_{11} = \frac{K_1}{A} = \lambda \frac{K_1}{A_0} = e^\varepsilon \frac{K_1}{A_0} = \frac{K_0}{A_0} (\varepsilon e^\varepsilon), \quad (4.51)$$

und die Piola-Kirchhoffsche Spannung auf dieser Fläche:

$$T_{11} = \frac{K_1}{A_0} = \frac{K_0}{A_0} \varepsilon. \quad (4.52)$$

wobei A_0 den Anfangsquerschnitt und A den augenblicklichen Querschnitt bezeichnen. Grob gesagt gibt die Spannung T_{11} den Verlauf der **äußeren Kraft** wieder, während die Spannung σ_{11} die **lokale Anstrengung** des Werkstoffs beschreibt. Bei kleinen Verformungen ($\varepsilon \ll 1 \Rightarrow e^\varepsilon \approx 1$) verschwindet der Unterschied zwischen beiden Spannungen. Es ist nicht der Fall bei großen Verformungen— die Spannungen unterscheiden sich nicht nur wertemäßig, sondern auch qualitativ: in unserem Beispiel hat σ_{11} ein Minimum, das nicht für T_{11} erscheint (Abb. 4.5). Der Cauchysche Spannungstensor σ und der Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor T unterscheiden sich auch in der Transformationsregel (Gl. (3.26)) voneinander:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{O}^* \mathbf{x} + \mathbf{c}^* \Rightarrow \boxed{\sigma^* = \mathbf{O}^* \sigma \mathbf{O}^{*T} \quad T^* = \mathbf{O}^* T} \quad (4.53)$$

die letzte Beziehung der unmittelbare Folge der Formel (4.37) ist:

$$J^* = J, \quad F^{*-T} = (\mathbf{O}^* F)^{-T} = \mathbf{O}^* F^{-T} \Rightarrow T^* = J \mathbf{O}^* \sigma \mathbf{O}^{*T} \mathbf{O}^* F^{-T} = \\ = \mathbf{O}^* (J \sigma F^{-T}).$$

Manchmal wird auch der **zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor** (die **materielle Spannung**) $\overset{\circ}{T}$ benutzt

$$\overset{\circ}{T} := F^{-1} T \equiv J (F^{-1} \sigma F^{-T}) \Rightarrow \overset{\circ}{T}^* = \overset{\circ}{T}. \quad (4.54)$$

4.4 Drallbilanz

Im Rahmen dieser Abhandlung erörtern wir ausschließlich solche Körper, die die einfachste Kinematik, d.h. drei lokale Freiheitsgrade (z.B. drei Komponenten der Bewegungsfunktion oder drei Komponenten der Geschwindigkeit), besitzen. In Übereinstimmung mit dieser Voraussetzung betrachten wir den Drall als ein Moment des Impulses mit der entsprechenden globalen Bilanzgleichung

$$\left[\forall P_t: \frac{d}{dt} \int_{P_t} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times (\rho \mathbf{v}) dV = \oint_{\partial P_t} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{t}_n dS + \int_{P_t} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times (\rho \mathbf{b}) dV \quad (4.55) \right.$$

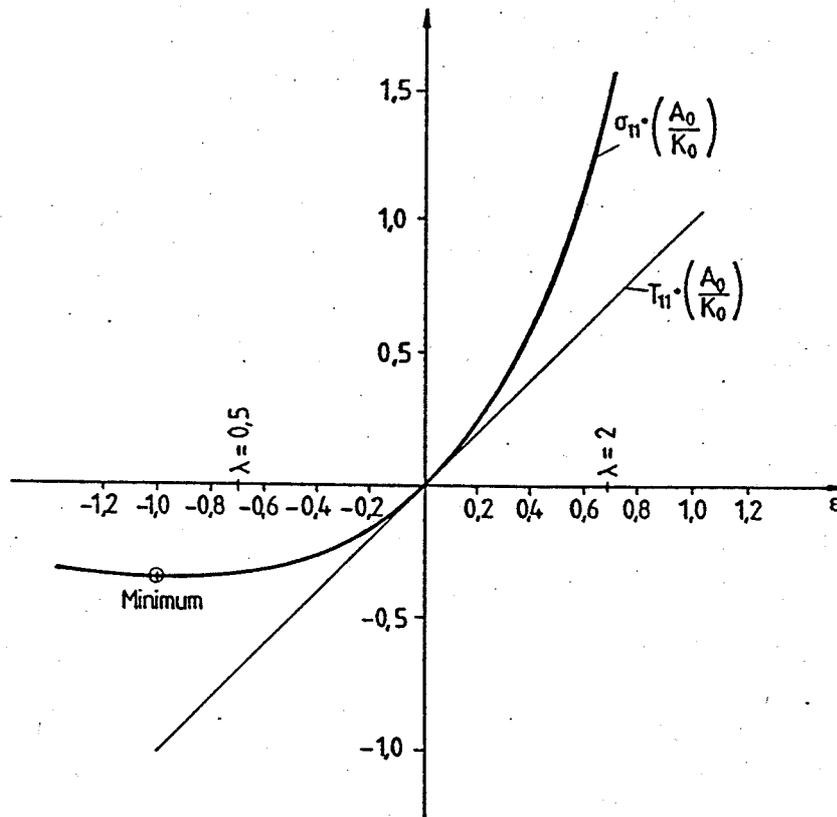


Abb. 4.5: Beispiel für den Unterschied zwischen der Cauchyschen und der Piola-Kirchhoffschen Zugspannung

wobei \mathbf{r}_0 einen beliebigen Ort im Bewegungsraum bezeichnet und \mathbf{r} der Ortsvektor ist. In kartesischen Koordinaten hat diese Gleichung die folgende Gestalt

$$\forall P_t: \frac{d}{dt} \int_{P_t} \varepsilon_{klm} (x_l - x_l^0) (\rho v_m) dV = \int_{\partial P_t} \varepsilon_{klm} (x_l - x_l^0) (\sigma_{mn} n_n) dS + \int_{P_t} \varepsilon_{klm} (x_l - x_l^0) (\rho b_m) dV. \quad (4.56)$$

Die Zeitdifferenzierung nach dem Muster der Massenbilanz, die Greensche Formel und die Schiefsymmetrie des Objektes ε_{klm} bewirken gemeinsam

$$\forall P_t: \int_{P_t} \left\{ \varepsilon_{klm} (x_l - x_l^0) [\rho v_m - \sigma_{mn,n} - \rho b_m] - \varepsilon_{klm} \sigma_{ml} \right\} dV = 0. \quad (4.57)$$

Mit der lokalen Impulsbilanzgleichung (4.39) läßt sich Gl. (4.57) in der folgenden lokalen Gestalt schreiben

$$\varepsilon_{klm} \sigma_{ml} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T} \quad (4.58)$$

Diese Symmetriebedingung für die Cauchysche Spannung wird von der Piola-Kirchhoffschen Spannung nicht erfüllt, sondern (vgl. 4.49):

$$\mathbf{T}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{T}^T. \quad (4.59)$$

4.5 Energiebilanz

Im Fall rein mechanischer Prozesse spielt die Energiebilanz eine sekundäre Rolle. Jedoch wollen wir weiter einige thermodynamische Bedingungen erörtern und dann ist die Energiebilanz (in diesem Zusammenhang auch der **erste Hauptsatz der Thermodynamik** genannt) von sehr großer Bedeutung.

Die Größe

$$E(P_t, t) = K(P_t, t) + \mathcal{E}(P_t, t), \quad (4.60)$$

$$K(P_t, t) := \frac{1}{2} \int_{P_t} \rho v^2 dV, \quad \mathcal{E}(P_t, t) := \int_{P_t} \rho \varepsilon dV$$

nennt man die **vollständige Energie** des Teilkörpers P_t , K wird die **kinetische Energie** des Teilkörpers P_t genannt und \mathcal{E} die **innere Energie** des Teilkörpers P_t . Die vollständige Energie soll die folgende Bilanzgleichung erfüllen

$$\left[\forall P_t : \frac{dE}{dt} = \oint_{\partial P_t} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_n - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{P_t} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} + r) dV. \quad (4.61) \right.$$

Die auftretenden Größen haben die folgende Interpretation

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_n$ – Leistung der Spannungen,
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}$ – Leistung der Volumenkräfte,
- \mathbf{q} – Wärmeflußvektor,
- r – Zufuhrdichte der Energie.

In zusammengefaßter Form

$$\boxed{\forall P_t : \frac{d}{dt} \int_{P_t} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) dV = \oint_{\partial P_t} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{P_t} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} + r) dV, \quad (4.62)}$$

wird diese **globale Energiebilanzgleichung** ähnlich wie die anderen Bilanzgleichungen in der lokalen Gestalt geschrieben werden.

Für einen nicht-singulären Ort \mathbf{x} erhalten wir

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} + \mathbf{q} \right] = \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} + r). \quad (4.63)}$$

Die folgenden einfachen Manipulationen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon)] + \operatorname{div} [\rho(\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon)\mathbf{v}] &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) \right) (\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon) + \\ &+ \rho\mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} \right) + \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon \right) \\ &= \mathbf{v} \cdot (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b}) + \rho\dot{\varepsilon}, \end{aligned}$$

wobei die Massenbilanz und die Impulsbilanz angewendet wurden, lassen die Gl. (4.63) folgendermaßen schreiben

$$\rho\dot{\varepsilon} = \operatorname{sp} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}^T - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho r, \quad \dot{\varepsilon} := \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon. \quad (4.64)$$

Wir haben hier die Identität

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \operatorname{sp} \boldsymbol{\sigma}(\operatorname{grad} \mathbf{v})^T = \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \operatorname{sp} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}^T, \quad (4.65)$$

und die Symmetrie der Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ benutzt.

Die Gl. (4.64) wird die **lokale Bilanzgleichung der inneren Energie** genannt.

Genau in der selben Weise wie für andere Bilanzgleichungen betrachten wir nun die Gl. (4.62) für solche Gebiete P_t , die von einer singulären Fläche S_t durchschnitten werden.

Für einen beliebigen Punkt dieser Fläche gilt

$$[[\rho(\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - c)]] = [[(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}]], \quad (4.66)$$

oder, mit Hilfe der Massenbilanz auf der singulären Fläche

$$m[[\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon]] + [[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v} - \mathbf{q}] \cdot \mathbf{n}] = 0. \quad (4.67)$$

Wir untersuchen zwei Sonderfälle dieser Gleichung. Ist die Fläche eine materielle Fläche:

$$m = 0 \Rightarrow [[\mathbf{v}]] \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ und } [[\boldsymbol{\sigma}]] \mathbf{n} = 0. \quad (4.68)$$

Wenn wir auch das Gleiten auf dieser Fläche vernachlässigen

$$[[\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}]] = 0 \Rightarrow [[\mathbf{v}]] = 0 \Rightarrow [[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}]] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.69)$$

erhalten wir aus (4.67) die **Fouriersche Bedingung**

$$[[\mathbf{q}]] \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (4.70)$$

Diese Gleichung ermöglicht die **Randbedingungen** für den Wärmeflußvektor \mathbf{q} zu formulieren, die sehr häufig in der Theorie der Wärmeleitung benutzt werden.

Der zweite Sonderfall betrifft die Ereignisse auf der Trennfläche der zwei Phasen während eines Phasenüberganges. Auch in diesem Fall wird das Gleiten vernachlässigt:

$$[[\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] = 0. \quad (4.71)$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned} m[[\frac{1}{2}v^2]] + [[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}]] \cdot \mathbf{n} &= m[[\frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - c)^2]] + m[[\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]]c + [[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - c)]] + \\ &+ [[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}]]c = \\ &= m[[\frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - c)^2 - \frac{1}{\rho}\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}]], \end{aligned}$$

wobei wir die Impulsbilanz angewendet haben. Letztlich wird

$$m[[\frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - c)^2 + \varepsilon - \frac{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}{\rho}]] - [[\mathbf{q}]] \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (4.72)$$

Mit Hilfe der Entropiebedingung, die wir weiter darstellen, führt diese Gleichung zur grundlegenden Bedingung für Phasenübergänge, die die Eigenschaften des sogenannten chemischen Potentials bestimmt.

Schließlich wollen wir noch eine kurze Bemerkung bezüglich der Transformationseigenschaften formulieren. Man nimmt an, daß die innere Energie und der Wärmefluß die folgende Regeln erfüllen

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{O}^*\mathbf{x} + \mathbf{c}^* \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^* = \varepsilon, \quad \mathbf{q}^* = \mathbf{O}^*\mathbf{q}, \quad r^* = r. \quad (4.73)$$

Das bedeutet, daß die Bilanzgleichung der inneren Energie (4.64) im neuen Bezugssystem die folgende Gestalt hat

$$\rho^*\dot{\varepsilon}^* = \text{sp } \boldsymbol{\sigma}^* \mathbf{L}^{*T} - \text{div } \mathbf{q}^* + \rho^* r^* - \text{sp } \boldsymbol{\sigma}^* \boldsymbol{\Omega}^*, \quad (4.74)$$

wobei wir die Regel (2.31) für \mathbf{L} angewendet haben. Offensichtlich ist die Symmetrie des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}^*$ hinreichend für die Invarianz der Gl. (4.64)

$$\text{sp } \boldsymbol{\sigma}^* \boldsymbol{\Omega}^* \equiv 0. \quad (4.75)$$

Im Fall des nicht-symmetrischen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ (z.B. Cosseratsche Werkstoffe) folgt die Invarianz der Gl. (4.64) nicht automatisch. Manchmal kann man sie sogar nicht verlangen. Wir möchten jedoch diese Frage hier nicht erörtern.

4.6 Entropiebilanz

Im Gegensatz zu der inneren Energie, deren physikalischen Bedeutung an keine besonderen intellektuelle Schwierigkeiten stößt, ist der Begriff der Entropie nicht so anschaulich.

Wir werden diesen Begriff nur instrumental benutzen und brauchen nicht die Einzelheiten zu erwähnen. Von Bedeutung ist die Annahme, daß die Entropie eine globale Bilanzgleichung erfüllt

$$\left[\forall P_t : \frac{d}{dt} \int_{P_t} \rho \eta dV + \oint_{\partial P_t} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{P_t} \rho s dV = \int_{P_t} \sigma dV. \right. \quad (4.76)$$

Die Größe η wird **Entropiedichte** genannt, \mathbf{h} ist der **Entropiefluß**, s die **Entropiezufuhr** und σ die **Entropieproduktion**. Die Gestalt dieser Größen hängt vom Werkstoff ab. Sie wird weiter mit einigen Einzelheiten dargestellt. Die Anwesenheit des Produktionsgliedes bedeutet, daß die Entropie nicht erhalten bleibt, unabhängig davon, ob der Fluß durch die Fläche ∂P_t und die Zufuhr verschwinden (Isolierung) oder nicht.

Genau so wie es der Fall für andere Bilanzgrößen gewesen ist, erhalten wir aus (4.76) die folgende lokale Bilanzgleichungen der Entropie

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \eta}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \eta \mathbf{v} + \mathbf{h}) - \rho s - \sigma &= \\ \equiv \rho \dot{\eta} + \operatorname{div} \mathbf{h} - \rho s - \sigma = 0, \quad \dot{\eta} &:= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \eta, \end{aligned} \quad (4.77)$$

im Fall regulärer Orte, und

$$m[[\eta]] - [[\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}]] = 0, \quad (4.78)$$

auf der singulären Fläche, vorausgesetzt, daß die Zufuhr s und die Produktion σ stetig sind.

Kompendium der Bilanzgleichungen

a) reguläre Orte

Masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \left| \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} = 0 \right.$$

Impuls

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma}) = \rho \mathbf{b} \quad \left| \quad \frac{\partial \rho v_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho v_k v_l - \sigma_{kl}) = \rho b_k \right.$$

Energie

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} + \mathbf{q} \right] = \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \rho r \quad \left| \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{1}{2} v_k v_k + \varepsilon \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\rho \left(\frac{1}{2} v_k v_k v_l + \varepsilon \right) - \sigma_{lk} v_k + q_l \right] = \rho b_k v_k \right.$$

Entropie

$$\frac{\partial \rho \eta}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \eta \mathbf{v} + \mathbf{h}) = \rho s + \sigma \quad \left| \quad \frac{\partial \rho \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho \eta v_k + h_k) = \rho s + \sigma \right.$$

b) singuläre Flächen

Masse

$$m := \rho^+(c - \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n}) = \rho^-(c - \mathbf{v}^- \cdot \mathbf{n}) \quad \left| \quad \rho^+(c - v_k^+ n_k) = \rho^-(c - v_k^- n_k) \right.$$

Impuls

$$m[[\mathbf{v}]] + [[\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}]] = 0 \quad \left| \quad m[[v_k]] + [[\sigma_{kl}] n_l] = 0 \right.$$

Energie

$$m\left[\left[\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon\right]\right] + [[\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}]] = 0 \quad \left| \quad m\left[\left[\frac{1}{2} v_k v_k + \varepsilon\right]\right] + [[v_k \sigma_{kl} n_l - q_k n_k]] = 0 \right.$$

Entropie

$$m[[\eta]] - [[\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}]] = 0 \quad \left| \quad m[[\eta]] - [[h_k n_k]] = 0 \right.$$

c) reduzierte Form

Masse

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \left| \quad \dot{\rho} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \right.$$

Impuls

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad \left| \quad \rho \dot{v}_k = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} + \rho b_k \right.$$

Innere Energie

$$\rho \dot{\varepsilon} = \operatorname{sp} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}^T - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho r \quad \left| \quad \rho \dot{\varepsilon} = \sigma_{kl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \rho r \right.$$

Entropie

$$\rho \dot{\eta} + \operatorname{div} \mathbf{h} = \rho s + \sigma \quad \left| \quad \rho \dot{\eta} + \frac{\partial h_k}{\partial x_k} = \rho s + \sigma \right.$$

d) andere Ergebnisse

Poissonsche Bedingung: $m = 0 \Rightarrow [[\boldsymbol{\sigma}]] \mathbf{n} = 0$,

Fouriersche Bedingung: $m = 0$ und $[[\mathbf{v}]] = [[\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]] \mathbf{n} \Rightarrow [[\mathbf{q}]] \cdot \mathbf{n} = 0$

5 Werkstoffgesetze — Beispiele

5.1 Vorbemerkungen

Es ist offensichtlich, daß die Erhaltungssätze, die wir in Kapitel 4 dargestellt haben, nicht ausreichen, um die erforderlichen Felder der Bewegung, Geschwindigkeit, Spannung usw. zu bestimmen. Die zusätzlichen Beziehungen, die man benötigt, um die vollständigen Feldgleichungen zu erhalten, nennt man die **konstitutiven Gleichungen** oder die **Stoffgesetze**. Im Gegensatz zu den bisherigen Gleichungen dieser Abhandlung werden diese Gleichungen abhängig von dem Material sein, das wir beabsichtigen zu modellieren. Aus diesem Grund kann man kein bestimmtes System der Stoffgesetze universell formulieren. Für jeden Werkstoff und jede Prozessbeschränkungen muß man neue Gesetze vorschreiben. Für den Festkörper zum Beispiel, dessen experimentell bestimmte Verzerrungen linear von den Belastungen abhängig sind, kann man für kleine Verzerrungen das Hooksche Gesetz anwenden. Für denselben Festkörper muß man Beanspruchungen, die zu einer Restverformung nach der Entlastung führen, mit einem anderen Stoffgesetz verbinden. Das bedeutet, daß ein Werkstoff im Rahmen des makroskopischen Modells nicht nur nach chemischer Zusammensetzung, kristallographischer Symmetrie usw. definiert wird, sondern auch die Grenzen des untersuchten Prozesses festgelegt werden müssen. In diesem Sinn kann derselbe Festkörper elastisch, elasto-plastisch, elasto-viskoplastisch u.ä. sein, abhängig davon, wie groß die Beanspruchung ist, wie lange die Beobachtungen dauern und mit welcher Geschwindigkeit die Beanspruchung geändert wird. Dieselbe Flüssigkeit kann als ideale Eulersche Flüssigkeit oder als viskose Flüssigkeit betrachtet werden, abhängig davon, ob wir die kurzfristigen oder die dauerhaften Eigenschaften beobachten. Aus dem selben Grund kann man häufig kaum zwischen einer Flüssigkeit und einem Festkörper unterscheiden.

Versuchsergebnisse vereinfachen kaum die Aufgabe, die wir bei der Modellbildung bewältigen müssen. Zur Verfügung stehen nur Ergebnisse für einige einfache Geometrien und nur für bestimmte Stellen der Proben. Das heißt, daß wir eine Theorie auf einer **Erweiterung** dieser Ergebnisse begründen müssen, wenn die Stoffgesetze nicht nur die Verhältnisse in der Experimentalanalyse wiedergeben sollen. Diese Erweiterung ist keineswegs eindeutig.

Die Modellbildung der Kontinuumsmechanik ist trotz des obigen Sachverhaltes nicht ganz willkürlich. Es wird verlangt, daß die Stoffgesetze einige **allgemeine Prinzipien** erfüllen sollen. Wir stellen hier die Wirkung zweier Prinzipien dar:

- den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik,
- die materielle Objektivität.

Grob gesagt verlangt der zweite Hauptsatz, daß die Felder, die man durch Anwendung des ausgewählten Stoffgesetzes als Lösung der Feldgleichungen erhält, identisch die nicht-negative Entropieproduktion σ auf jedem regulären Ort liefern müssen. Die materielle Objektivität verlangt, daß die konstitutiven Funktionen, die die Stoffgesetze definieren, invariant bezüglich der Änderung des Beobachters im Bewegungsraum sein müssen. Wir erörtern die Einzelheiten weiter in diesem Kapitel.

Unabhängig von den zwei oben genannten Punkten verlangt man manchmal auch, daß die Feldgleichungen hyperbolisch sein sollen, daß die Werkstoffgesetze einer bestimmten Isotropieinvarianz untergeordnet sein sollten und daß sie das sogenannte Äquipräsenzprinzip erfüllen müssen. Wir wollen diese Bedingungen hier nicht erörtern. Wir stellen jetzt einige Beispiele von Stoffgesetzen dar, um die obigen Bemerkungen anschaulicher zu machen. Für diesen Zweck wiederholen wir zunächst die Erhaltungssätze, die uns zur Verfügung stehen.

1. Materielle (Lagrangesche) Beschreibung. Wir suchen die Vektorfunktion

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) \quad , \quad \mathbf{X} \in B_0, \quad (5.1)$$

die die Bewegung beschreibt, und das Temperaturfeld

$$\theta = \theta(\mathbf{X}, t) \quad , \quad \theta > 0, \quad (5.2)$$

dessen physikalische Bedeutung in dieser Arbeit nicht weiter erläutert wird. Unmittelbar aus den globalen Bilanzgleichungen erhalten wir

$$\bullet \quad \varrho = \frac{\varrho_0}{J} \quad , \quad J = \det \mathbf{F} \quad , \quad \varrho_0 = \varrho(\mathbf{X}, t = 0) \quad (5.3)$$

(Massenbilanz)

$$\bullet \quad \varrho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \text{Div } \mathbf{T} \quad , \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \quad , \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{X}, t), \quad (5.4)$$

(Impulsbilanz)

$$\bullet \quad \mathbf{T} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{T}^T, \quad (5.5)$$

(Drallbilanz)

$$\bullet \quad \varrho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{Div } \mathbf{q} = \text{sp}(\mathbf{T} \dot{\mathbf{F}}^T) \quad , \quad \varepsilon = \varepsilon(\mathbf{X}, t) \quad , \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{X}, t), \quad (5.6)$$

(Bilanz der inneren Energie),

wobei \mathbf{T} den ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor bezeichnet. Wir haben die äußeren Kräfte \mathbf{b} und die Energiestrahlung r vernachlässigt.

Offensichtlich sind die Gln. (5.4) und (5.6) Kandidaten für die Feldgleichungen. Um dies zu erreichen, müssen wir für die Größen \mathbf{T} , ε und \mathbf{q} die konstitutiven Gleichungen vorschlagen. Zu diesem Zweck nehmen wir an, daß diese Größen von räumlichen Änderungen der Bewegung \mathbf{f} und der Temperatur θ abhängig sein müssen. Die einfachsten Stoffgesetze, die diese Annahmen erfüllen, definieren das thermoelastische Material

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= \mathbf{T}(\mathbf{f}, \mathbf{F}, \theta), \\
 \varepsilon &= \varepsilon(\mathbf{f}, \mathbf{F}, \theta), \\
 \mathbf{q} &= -\mathcal{K}(\mathbf{f}, \mathbf{F}, \theta) \text{ Grad } \theta,
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

wobei \mathbf{T} und \mathcal{K} die Tensorfunktionen und ε eine Skalarfunktion ist.

Wir haben hier zwei zusätzlichen Annahmen gemacht. Erstens haben wir angenommen, daß \mathbf{T} , ε und \mathbf{q} von materiellen Koordinaten und von der Zeit nur indirekt abhängig sind. Diese Annahme bedeutet z. B., daß das Material **homogen** ist. Zweitens haben wir die Abhängigkeit vom Temperaturgradienten nur im Wärmefluß \mathbf{q} gelassen. Diese Annahme ist physikalisch nicht notwendig, jedoch werden deswegen die weiteren Überlegungen wesentlich vereinfacht.

2. Räumliche (Eulersche) Beschreibung. Wir suchen jetzt die Felder der Massendichte

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in B_t, \tag{5.8}$$

des Geschwindigkeitsvektors

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \tag{5.9}$$

und der Temperatur

$$\theta = \theta(\mathbf{x}, t), \quad \theta > 0. \tag{5.10}$$

In dieser Beschreibung wird die Bewegungsfunktion \mathbf{f} nicht gesucht. Die Trajektorien können rückwärts gefunden werden, wie wir es im Kapitel 3 gezeigt haben. Dennoch erfordern viele Prozesse, die in der Praxis auftreten, diese zusätzliche Integration nicht. Das ist meistens der Fall, wenn wir die klassischen Flüssigkeiten modellieren. Es folgt, daß wir den Deformationsgradient \mathbf{F} auch nicht zur Verfügung haben. Folglich können wir die Beziehung (5.3) nicht benutzen, und die Massendichte muß aus der Feldgleichung gefunden werden. Die lokalen Bilanzgleichungen, die wir in diesem Fall zur Verfügung haben, wurden ausführlich im Kapitel 4 erörtert. Wir haben

$$\bullet \quad \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (\text{Massenbilanz}) \tag{5.11}$$

$$\bullet \quad \rho \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{Impulsbilanz}) \tag{5.12}$$

$$\bullet \quad \boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{Drallbilanz}) \tag{5.13}$$

$$\bullet \quad \rho \dot{\varepsilon} + \operatorname{div} \mathbf{q} = \operatorname{sp} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}^T, \quad \varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{L} = \operatorname{grad} \mathbf{v} \tag{5.14}$$

(Bilanz der inneren Energie).

Die Gln. (5.11), (5.12) und (5.14) würden in die Feldgleichungen für ρ , \mathbf{v} und θ umgewandelt werden können, vorausgesetzt, daß wir konstitutive Gleichungen für die Größen $\boldsymbol{\sigma}$, ε und \mathbf{q} vorgeschlagen hätten.

Wir untersuchen wieder ein Beispiel eines Werkstoffes, dessen Definition durch die fol-

genden Beziehungen entsteht

$$\begin{aligned}\sigma &= \Sigma(\mathbf{x}, \rho, \mathbf{v}, L, \theta), \\ \varepsilon &= \varepsilon(\mathbf{x}, \rho, \mathbf{v}, L, \theta), \\ \mathbf{q} &= -\kappa(\mathbf{x}, \rho, \mathbf{v}, L, \theta) \text{ grad } \theta.\end{aligned}\quad (5.15)$$

Dieser Stoff wird eine wärmeleitende viskose Flüssigkeit genannt.

5.2 Materielle Objektivität

Die Transformation

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{O}^* \mathbf{x} + \mathbf{c}^*, \quad \mathbf{O}^{*T} = \mathbf{O}^{*-1}, \quad \mathbf{O}^* = \mathbf{O}^*(t), \quad \mathbf{c}^* = \mathbf{c}^*(t) \quad (5.16)$$

spielt eine sehr wichtige Rolle bei der Vereinfachung der konstitutiven Gleichungen. Es wird angenommen, daß diese Transformation nur insofern die konstitutiven Gleichungen ändern kann, wie es durch die Änderung der Raumkoordinaten der Vektoren und Tensoren erforderlich macht.

Im Fall der Beziehungen (5.7) werden die materiellen Koordinaten nicht berührt und die materielle Objektivität bedeutet, daß die konstitutiven Gleichungen nach der Transformation (5.16) die folgende Gestalt haben sollen

$$\left[\begin{array}{ll} \mathbf{T}^* = \mathcal{T}(\mathbf{f}^*, \mathbf{F}^*, \theta^*), & \mathbf{T}^* = \mathbf{O}^* \mathbf{T}, \\ \varepsilon^* = \varepsilon(\mathbf{f}^*, \mathbf{F}^*, \theta^*), & \varepsilon^* = \varepsilon, \\ \mathbf{q}^* = -\mathcal{K}(\mathbf{f}^*, \mathbf{F}^*, \theta^*) \text{ Grad } \theta^*, & \mathbf{q}^* = \mathbf{q}, \end{array} \right. \quad (5.17)$$

mit

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{O}^* \mathbf{f} + \mathbf{c}^*, \quad \mathbf{F}^* = \mathbf{O}^* \mathbf{F}, \quad \theta^* = \theta \quad (5.18)$$

und die unveränderten Funktionen \mathcal{T} , ε und \mathcal{K} .

Es folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\mathbf{O}^* \mathbf{f} + \mathbf{c}^*, \mathbf{O}^* \mathbf{F}, \theta) &= \mathbf{O}^* \mathcal{T}(\mathbf{f}, \mathbf{F}, \theta), \\ \varepsilon(\mathbf{O}^* \mathbf{f} + \mathbf{c}^*, \mathbf{O}^* \mathbf{F}, \theta) &= \varepsilon(\mathbf{f}, \mathbf{F}, \theta), \\ \mathcal{K}(\mathbf{O}^* \mathbf{f} + \mathbf{c}^*, \mathbf{O}^* \mathbf{F}, \theta) &= \mathcal{K}(\mathbf{f}, \mathbf{F}, \theta),\end{aligned}\quad (5.19)$$

für alle orthogonalen Matrizen \mathbf{O}^* und alle Vektoren \mathbf{c}^* .

Es ist einfach, die Lösung der Gln. (5.19) herauszufinden. Im Fall $\mathbf{O}^* = \mathbf{I}$ gilt

$$\mathcal{T}(\mathbf{f} + \mathbf{c}^*, \mathbf{F}; \theta) = \mathcal{T}(\mathbf{f}, \mathbf{F}, \theta) \quad (5.20)$$

für alle Vektoren \mathbf{c}^* . Ähnliche Beziehungen gelten für die anderen zwei Funktionen. Offensichtlich müssen dann diese Funktionen von \mathbf{f} unabhängig sein:

$$\mathbf{T} = \mathcal{T}(\mathbf{F}, \theta), \quad \varepsilon = \varepsilon(\mathbf{F}, \theta), \quad \mathbf{q} = -\mathcal{K}(\mathbf{F}, \theta) \text{ Grad } \theta. \quad (5.21)$$

Nach (5.19) soll nun die folgende Bedingung erfüllt werden

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{F}^*, \theta) &= \mathbf{O}^* \mathbf{T}(\mathbf{F}, \theta) \\ \varepsilon(\mathbf{F}^*, \theta) &= \varepsilon(\mathbf{F}, \theta) \\ \mathcal{K}(\mathbf{F}^*, \theta) &= \mathcal{K}(\mathbf{F}, \theta) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Nehmen wir an, daß lokal an einer bestimmten Stelle die Drehung der Koordinaten mit dem Drehanteil des Deformationsgradienten \mathbf{F} übereinstimmt

$$\mathbf{O}^{*T} \stackrel{*}{=} \mathbf{R}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}. \quad (5.23)$$

Diese Beziehung muß man als die Gleichheit zweier Matrizen verstehen, weil tensoriell \mathbf{O}^* die Drehung der räumlichen Bezugssysteme und \mathbf{R} die Drehung der Raumkoordinaten bezüglich materieller Koordinaten beschreiben. Deshalb haben wir die Gleichung mit dem Stern bezeichnet ($O_{kl}^* = R_{lK} \delta_{Kk}$!). Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{U}, \theta) &\stackrel{*}{=} \mathbf{R}^T \mathbf{T}(\mathbf{F}, \theta) \Rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{F}, \theta) = \mathbf{F} \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{C}, \theta) \\ \varepsilon(\mathbf{U}, \theta) &\stackrel{*}{=} \varepsilon(\mathbf{F}, \theta) \Rightarrow \varepsilon(\mathbf{F}, \theta) = \bar{\varepsilon}(\mathbf{C}, \theta) \\ \mathcal{K}(\mathbf{U}, \theta) &\stackrel{*}{=} \mathcal{K}(\mathbf{F}, \theta) \Rightarrow \mathcal{K}(\mathbf{F}, \theta) = \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{C}, \theta) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Wir lassen den Strich weg, um die Bezeichnungen nicht zu komplizieren. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{F} \mathbf{T}(\mathbf{C}, \theta), \\ \varepsilon &= \varepsilon(\mathbf{C}, \theta), \\ \mathbf{q} &= -\mathcal{K}(\mathbf{C}, \theta) \text{ Grad } \theta. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Das ist die endgültige, materiell objektive Gestalt der konstitutiven Gleichungen für das thermoelastische Material.

Betrachten wir jetzt die Beziehungen (5.15). Wir haben

$$\left[\begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}^*, \varrho^*, \mathbf{v}^*, \mathbf{L}^*, \theta^*), & \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{O}^* \boldsymbol{\sigma} \mathbf{O}^{*T}, \\ \varepsilon^* = e(\mathbf{x}^*, \varrho^*, \mathbf{v}^*, \mathbf{L}^*, \theta^*), & \varepsilon^* = \varepsilon, \\ \mathbf{q}^* = -\kappa(\mathbf{x}^*, \varrho^*, \mathbf{v}^*, \mathbf{L}^*, \theta^*) \text{ grad }^* \theta^*, & \mathbf{q}^* = \mathbf{O}^* \mathbf{q}, \end{array} \right. \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{O}^* \mathbf{x} + \mathbf{c}^*, & \varrho^* &= \varrho, \\ \mathbf{v}^* &= \mathbf{O}^* \mathbf{v} + \dot{\mathbf{O}}^* \mathbf{x} + \dot{\mathbf{c}}^*, & \mathbf{L}^* &= \mathbf{O}^* \mathbf{L} \mathbf{O}^{*T} + \dot{\mathbf{O}}^* \mathbf{O}^{*T}, \\ \theta^* &= \theta, & \text{grad }^* \theta^* &= \mathbf{O}^* (\text{grad } \theta). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Diese Beziehungen führen zu den folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{O}^* \mathbf{x} + \mathbf{c}^*, \varrho, \mathbf{O}^* \mathbf{v} + \dot{\mathbf{O}}^* \mathbf{x} + \dot{\mathbf{c}}^*, \mathbf{O}^* \mathbf{L} \mathbf{O}^{*T} + \dot{\mathbf{O}}^* \mathbf{O}^{*T}, \theta) &= \\ &= \mathbf{O}^* \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}, \varrho, \mathbf{v}, \mathbf{L}, \theta) \mathbf{O}^{*T}, \\ e(\mathbf{O}^* \mathbf{x} + \mathbf{c}^*, \varrho, \mathbf{O}^* \mathbf{v} + \dot{\mathbf{O}}^* \mathbf{x} + \dot{\mathbf{c}}^*, \mathbf{O}^* \mathbf{L} \mathbf{O}^{*T} + \dot{\mathbf{O}}^* \mathbf{O}^{*T}, \theta) &= \\ &= e(\mathbf{x}, \varrho, \mathbf{v}, \mathbf{L}, \theta), \\ \kappa(\mathbf{O}^* \mathbf{x} + \mathbf{c}^*, \varrho, \mathbf{O}^* \mathbf{v} + \dot{\mathbf{O}}^* \mathbf{x} + \dot{\mathbf{c}}^*, \mathbf{O}^* \mathbf{L} \mathbf{O}^{*T}, \theta) &= \\ &= \mathbf{O}^* \kappa(\mathbf{x}, \varrho, \mathbf{v}, \mathbf{L}, \theta) \mathbf{O}^{*T}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

für beliebige zeitabhängige orthogonale Matrizen O^* und beliebige zeitabhängige Vektoren c^* . Die Wahl von c^*

$$c^* = -O^* x \quad (5.29)$$

zeigt, daß diese Funktionen nicht von x abhängig sein können. Folglich muß auch die Abhängigkeit von v verschwinden. Die Zerlegung

$$L = D + W \quad (5.30)$$

und die Wahl der orthogonalen Matrix O^*

$$W = -O^{*T} \dot{O}^* \quad (5.31)$$

beweist, daß die Abhängigkeit von W unmöglich ist. Schließlich bleiben die folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} \Sigma(\varrho^*, D^*, \theta) &= O^* \Sigma(\varrho, D, \theta) O^{*T}, \\ e(\varrho^*, D^*, \theta) &= e(\varrho, D, \theta), \\ \kappa(\varrho^*, D^*, \theta) &= O^* \kappa(\varrho, D, \theta) O^{*T}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Offensichtlich sind die konstitutiven Funktionen in dieser reduzierten Form immer noch von räumlichen Koordinaten (Beobachter) abhängig. Diese Abhängigkeit folgt nicht nur durch Abhängigkeit der Tensorkoordinaten von Σ und κ , sondern auch durch die Anwesenheit von D in den Argumenten. Man kann das besonders deutlich bei der Skalarfunktion e sehen. Es wäre nicht der Fall, wenn D nur durch die Invarianten

$$I^D = \text{sp } D, \quad II^D = \frac{1}{2}(I^{D^2} - \text{sp } D^2), \quad III^D = \det D \quad (5.33)$$

in der Skalarfunktion e aufgetaucht wäre

$$\varepsilon = e(\varrho, I^D, II^D, III^D, \theta) \quad (5.34)$$

und die Tensorfunktionen isotrop wären

$$\begin{aligned} \sigma &= \Sigma_1 \mathbf{I} + \Sigma_2 D + \Sigma_3 D^2, \\ q &= -(\kappa_1 \mathbf{I} + \kappa_2 D + \kappa_3 D^2) \text{grad } \theta \end{aligned} \quad (5.35)$$

wobei $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ Skalarfunktionen von der selben Variablen wie in (5.34) abhängig sind. Die höheren Potenzen von D erscheinen nicht wegen des Hamilton-Cayley Theorems

$$D^3 - I^D D^2 + II^D D - III^D \mathbf{I} = 0, \quad (5.36)$$

das D^3 und alle höheren Potenzen von D durch D, D^2 und Invarianten von D auszudrücken gestattet.

Die Ergebnisse (5.34), (5.35) zeigen, daß das Objektivitätsprinzip gemeinsam mit den konstitutiven Funktionen (5.15) nur die isotropen Flüssigkeiten zuläßt. In Zusammenhang mit dem Objektivitätsprinzip soll man betonen, daß die allgemeine Gültigkeit dieses Prinzips in Frage gestellt wurde. Ende der sechziger Jahre wurden einige Arbeiten

von I. Müller (TU Berlin) veröffentlicht, in denen er mit Hilfe der kinetischen Theorie der Gase bewiesen hat, daß das Prinzip nur eine Näherung ist. Die zusätzlichen materiell nicht-objektiven Glieder in konstitutiven Funktionen folgen in Beispielen von I. Müller aus der Anwesenheit der nicht-inertiellen Anteile der Beschleunigung auf der Mikroebene der Beschreibung. Fast zwanzig Jahre später haben I. Müller und K. Wilmski gezeigt, daß die Bedingungen der Objektivität und der Inkompressibilität widersprüchlich sein können. Dennoch beweisen die Größenordnungsabschätzungen, daß das Prinzip normalerweise eine sehr gute makroskopische Näherung ist.

5.3 Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik

Wir haben schon angedeutet, daß der zweite Hauptsatz durch eine Forderung für die Entropiebilanz (4.77) entsteht. An einem regulären Ort eines Körpers fordern wir die folgende Gestalt des zweiten Hauptsatzes:

1. Die Felder der Entropiedichte η , des Entropieflusses \mathbf{h} und der Entropieproduktion σ sind die konstitutiven Größen;
2. Diese Größen erfüllen die Bilanzgleichung

$$\begin{aligned} \text{a) } \varrho_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{Div } \mathbf{h} &= \sigma && \text{in materieller Beschreibung,} \\ \text{b) } \varrho \dot{\eta} + \text{div } \mathbf{h} &= \sigma && \text{in räumlicher Beschreibung.} \end{aligned} \quad (5.37)$$

3. Für alle Felder, die die Feldgleichungen erfüllen, ist die Entropieproduktion nicht-negativ

$$\sigma \geq 0. \quad (5.38)$$

Wir vernachlässigen die Fälle mit dem Strahlungsglied: $s \equiv 0$.

Beispielsweise sollen die Werkstoffe, die wir früher definiert haben, die folgenden Bedingungen erfüllen:

- thermoelastisches Material:

$$\begin{aligned} \eta &= \eta(\mathbf{C}, \theta), \quad \mathbf{h} = -\mathcal{H}(\mathbf{C}, \theta) \text{ Grad } \theta, \\ \varrho_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{Div } \mathbf{h} &\geq 0, \end{aligned} \quad (5.39)$$

für alle \mathbf{C} und θ , die die Lösungen der Feldgleichungen sind;

- wärmeleitende viskose Flüssigkeit

$$\begin{aligned}
 \eta &= \eta(\rho, I^D, II^D, III^D, \theta), \\
 \mathbf{h} &= -(\chi_1 \mathbf{I} + \chi_2 \mathbf{D} + \chi_3 \mathbf{D}^2) \text{grad } \theta \\
 \chi_a &= \chi_a(\rho, I^D, II^D, III^D, \theta), \quad a = 1, 2, 3, \\
 \rho \dot{\eta} + \text{div } \mathbf{h} &\geq 0
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

für alle ρ , \mathbf{D} und θ , die die Lösungen der Feldgleichungen sind.

Im Zusammenhang mit der Gestalt des zweiten Hauptsatzes werden bis heute heftige Diskussionen geführt. Mindestens werden die folgenden Fragen gestellt:

- existieren die Entropie und der Entropiefluß außer dem sogenannten thermodynamischen Gleichgewicht, d. h. für $\sigma \neq 0$,
- welche physikalische Bedeutung haben diese Größen in solchen Ungleichgewichtszuständen,
- welche Gestalt soll der zweite Hauptsatz haben, wenn die sogenannten Gedächtniseffekte erscheinen, d.h. wenn die augenblicklichen Geschehnisse von der Geschichte des Prozesses abhängig sind.

Sowohl diese Fragen als auch viele andere haben bis jetzt keine zufriedenstellenden Antworten gefunden. Im Rahmen dieses Vortrages wollen wir diese Grundlagen der Kontinuumsthermodynamik nicht erörtern. Wir zeigen, daß die Ungleichung (5.38) zusammen mit Bilanzgleichung (5.37)₁ oder (5.37)₂ hinreichende Ergebnisse herstellen, wenn es sich um die praktisch wichtigsten thermodynamischen Modelle handelt.

Das systematische Verfahren zur Auswertung des zweiten Hauptsatzes wurde in den sechziger Jahren entworfen. Wir folgen hier der Methode, die von I. Müller vorgeschlagen wurde und in dem Satz von I-Shi-Liu (1973) den Höhepunkt erreicht hatte. Den Satz selbst kann man in Nachschlagewerken finden. Wir skizzieren hier das Verfahren, ohne die mathematischen Grundlagen zu berühren.

Nach dem dritten Punkt des zweiten Hauptsatzes muß die Ungleichung

$$\begin{aligned}
 \rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{Div } \mathbf{h} &\geq 0 \quad \text{in materieller Beschreibung} \\
 \rho \dot{\eta} + \text{div } \mathbf{h} &\geq 0 \quad \text{in räumlicher Beschreibung}
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

für alle Lösungen der Feldgleichungen identisch erfüllt werden. Die Anwendung der konstitutiven Gleichungen führt zu:

$$\begin{aligned}
 \rho_0 \left(\text{sp} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{C}} \dot{\mathbf{C}} + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \dot{\theta} \right) - \text{Grad } \theta \cdot \text{Div } \mathcal{H}^T - \\
 - \text{sp } \mathcal{H}(\text{Grad} \otimes \text{Grad}) \theta \geq 0,
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

oder, in Lagrangeschen Koordinaten,

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial C_{\alpha\beta}} C_{\alpha\beta} + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \dot{\theta} \right) - \frac{\partial \mathcal{H}_{\alpha\beta}}{\partial C_{\gamma\delta}} \frac{\partial C_{\gamma\delta}}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial X_\beta} - \\ - \frac{\partial \mathcal{H}_{\alpha\beta}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial X_\beta} - \mathcal{H}_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \geq 0, \end{aligned} \quad (5.43)$$

für das thermoelastische Material, und

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial \eta}{\partial I^D} I^D + \frac{\partial \eta}{\partial II^D} II^D + \frac{\partial \eta}{\partial III^D} III^D + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \dot{\theta} \right) - \\ - \text{grad } \theta \cdot \text{div } \kappa^T - \text{sp } \kappa (\text{grad} \otimes \text{grad}) \theta \geq 0, \end{aligned} \quad (5.44)$$

oder, in Eulerschen Koordinaten,

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial \eta}{\partial I^D} I^D + \frac{\partial \eta}{\partial II^D} II^D + \frac{\partial \eta}{\partial III^D} III^D + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \dot{\theta} \right) - \\ - \frac{\partial \kappa_{kl}}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_l} - \frac{\partial \kappa_{kl}}{\partial D_{mn}} \frac{\partial D_{mn}}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_l} - \frac{\partial \kappa_{kl}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_l} - \\ - \kappa_{kl} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k \partial x_l} \geq 0, \end{aligned} \quad (5.45)$$

mit

$$\kappa := \chi_1 \mathbf{I} + \chi_2 \mathbf{D} + \chi_3 \mathbf{D}^2, \quad (5.46)$$

für die wärmeleitende viskose Flüssigkeit.

Die Beschränkung der Gültigkeit dieser Ungleichungen auf die Lösungen der Feldgleichungen bedeutet, daß wir die Lösungen der Ungleichungen mit **Zwangsbedingungen** suchen. Der Satz von Liu ermöglicht diese Zwangsbedingungen — die Feldgleichungen — mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren zu eliminieren. I-Shi-Liu hat die Existenz dieser Multiplikatoren als konstitutive Funktionen bewiesen.

Diese Bemerkung bedeutet, daß im Falle des thermoelastischen Materials die Ungleichung

$$\left(\rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{Div } \mathbf{h} \right) - \Lambda^v \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} - \text{Div } \mathbf{T} \right) - \Lambda^\varepsilon \left(\rho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{Div } \mathbf{q} - \text{sp } \mathbf{T} \dot{\mathbf{F}}^T \right) \geq 0 \quad (5.47)$$

mit

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon(\mathbf{C}, \theta), \quad \eta = \eta(\mathbf{C}, \theta), \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{C}, \theta), \\ \mathbf{q} &= -\mathcal{K}(\mathbf{C}, \theta) \text{Grad } \theta, \quad \mathbf{h} = -\mathcal{H}(\mathbf{C}, \theta) \text{Grad } \theta \\ \Lambda^v &= \Lambda^v(\mathbf{C}, \theta, \text{Grad } \theta), \quad \Lambda^\varepsilon = \Lambda^\varepsilon(\mathbf{C}, \theta, \text{Grad } \theta) \end{aligned} \quad (5.48)$$

für beliebige Felder \mathbf{f} und θ gelten muß. Der Vektor Λ^v und der Skalar Λ^ε bezeichnen die Lagrangeschen Multiplikatoren.

Ähnlich erhalten wir für die wärmeleitende viskose Flüssigkeit

$$(\rho\dot{\eta} + \operatorname{div} \mathbf{h}) - \Lambda^e(\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) - \Lambda^v \cdot (\rho \dot{\mathbf{v}} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) - \Lambda^e(\rho \dot{\varepsilon} + \operatorname{div} \mathbf{q} - \operatorname{sp} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}^t) \geq 0 \quad (5.49)$$

mit

$$\begin{aligned} \varepsilon &= e(\rho, I^D, II^D, III^D, \theta), \\ \eta &= \eta(\rho, I^D, II^D, III^D, \theta) \\ \boldsymbol{\sigma} &= \Sigma_1 \mathbf{I} + \Sigma_2 \mathbf{D} + \Sigma_3 \mathbf{D}^2, \\ \Sigma_a &= \Sigma_a(\rho, I^D, II^D, III^D, \theta), \quad a = 1, 2, 3 \\ \mathbf{q} &= -(\kappa_1 \mathbf{I} + \kappa_2 \mathbf{D} + \kappa_3 \mathbf{D}^2) \operatorname{grad} \theta, \\ \kappa_a &= \kappa_a(\rho, I^D, II^D, III^D, \theta), \quad a = 1, 2, 3 \\ \mathbf{h} &= -(\chi_1 \mathbf{I} + \chi_2 \mathbf{D} + \chi_3 \mathbf{D}^2) \operatorname{grad} \theta, \\ \chi_a &= \chi_a(\rho, I^D, II^D, III^D, \theta), \quad a = 1, 2, 3 \\ \Lambda^e &= \Lambda^e(\rho, I^D, II^D, III^D, \theta, \operatorname{grad} \theta), \\ \Lambda^e &= \Lambda^e(\rho, I^D, II^D, III^D, \theta, \operatorname{grad} \theta) \\ \Lambda^v &= \Lambda^v(\rho, \mathbf{D}, \operatorname{grad} \theta) \equiv \Lambda(\rho, I^D, II^D, III^D, \theta) \operatorname{grad} \theta. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Die letzte Identität folgt aus dem Objektivitätsprinzip. Das selbe Prinzip fordert, daß die Multiplikatoren Λ^e und Λ^v von $\operatorname{grad} \theta$ unabhängig sein müssen. Wieder muß die Ungleichung (5.49) mit den konstitutiven Beziehungen (5.50) für beliebige Felder ρ , \mathbf{v} und θ gelten.

Die Auswertung dieser Ungleichungen stellen wir in den folgenden Kapiteln 5.4 und 5.5 dar.

5.4 Thermodynamik des thermoelastischen Materials

Wir untersuchen nun die Ungleichung (5.47) mit den konstitutiven Beziehungen (5.48). Es ist einfacher, im Koordinatensystem zu arbeiten

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - \Lambda^e \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial X_\alpha} - \Lambda^e \frac{\partial q_\alpha}{\partial X_\alpha} \right) + \Lambda^e T_{k\alpha} \dot{F}_{k\alpha} - \\ - \Lambda_k^v \left(\rho_0 \frac{\partial v_k}{\partial t} - T_{k\alpha, \alpha} \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Die Anwendung der Beziehungen (5.48) führt zur Ungleichung

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial C_{\alpha\beta}} - \Lambda^e \frac{\partial \varepsilon}{\partial C_{\alpha\beta}} + \frac{1}{2\rho_0} \Lambda^e F_{\alpha k}^{-1} T_{k\beta} \right) \dot{C}_{\alpha\beta} + \rho_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \Lambda^e \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} - \\ - \left(\frac{\partial \mathcal{H}_{\alpha\beta}}{\partial X_\alpha} - \Lambda^e \frac{\partial \mathcal{K}_{\alpha\beta}}{\partial X_\alpha} \right) \frac{\partial \theta}{\partial X_\beta} - (\mathcal{H}_{\alpha\beta} - \Lambda^e \mathcal{K}_{\alpha\beta}) \frac{\partial^2 \theta}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} - \\ - \Lambda_k^v \left(\rho_0 \frac{\partial v_k}{\partial t} - T_{k\alpha, \alpha} \right) \geq 0 \end{aligned} \quad (5.52)$$

wobei wir die folgende Identität benutzt haben

$$\begin{aligned} \operatorname{sp} \mathbf{T} \dot{\mathbf{F}}^T &= \operatorname{sp} (\mathbf{T} \mathbf{F}^T) \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T = \operatorname{sp} (\mathbf{T} \mathbf{F}^T) \mathbf{D} = \\ \frac{1}{2} \operatorname{sp} \mathbf{T} \mathbf{F}^T \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{C}} \mathbf{F}^{-1} &= \frac{1}{2} \operatorname{sp} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \dot{\mathbf{C}} \Rightarrow T_{k\alpha} \dot{F}_{k\alpha} = \frac{1}{2} F_{\alpha k}^{-1} T_{k\beta} \dot{C}_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (5.53)$$

die aus der Drallbilanz (5.5) folgt.

Die Untersuchung der konstitutiven Beziehungen erweist, daß die Ungleichung (5.52) bezüglich

$$\dot{C}_{\alpha\beta}, \dot{\theta}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}, \frac{\partial v_k}{\partial t}$$

linear ist. Andererseits muß sie für beliebige Felder gelten; diese zwei Eigenschaften zusammen führen zu den Bedingungen

$$\begin{aligned} \Lambda_k^v &= 0, \\ T_{k\alpha} &= 2\rho_0 F_{k\beta} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial C_{\alpha\beta}} - \frac{1}{\Lambda^\varepsilon} \frac{\partial \eta}{\partial C_{\alpha\beta}} \right), \\ \frac{\partial \eta}{\partial \theta} &= \Lambda^\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha\beta)} := \frac{1}{2} (\mathcal{H}_{\alpha\beta} + \mathcal{H}_{\beta\alpha}) = \Lambda^\varepsilon \mathcal{K}_{(\alpha\beta)} := \frac{1}{2} \Lambda^\varepsilon (\mathcal{K}_{\alpha\beta} + \mathcal{K}_{\beta\alpha}).$$

Wir nehmen an, daß die beiden Matrizen \mathcal{H} und \mathcal{K} symmetrisch sind. Dann gilt die letzte Bedingung für vollständige Matrizen. Es bleibt die folgende Ungleichung

$$\frac{\partial \Lambda^\varepsilon}{\partial X_\alpha} q_\alpha \leq 0, \quad (5.55)$$

die die folgende explizite Gestalt hat

$$\left(\frac{\partial \Lambda^\varepsilon}{\partial C_{\gamma\delta}} \frac{\partial C_{\gamma\delta}}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial \Lambda^\varepsilon}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial \Lambda^\varepsilon}{\partial \left(\frac{\partial \theta}{\partial X_\beta} \right)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \right) q_\alpha \leq 0. \quad (5.56)$$

Offensichtlich ist diese Ungleichung linear bezüglich

$$\frac{\partial C_{\gamma\delta}}{\partial X_\alpha}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}.$$

Es folgt

$$\Lambda^\varepsilon = \Lambda^\varepsilon(\theta), \quad \frac{\partial \Lambda^\varepsilon}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X_\alpha} q_\alpha \right) \leq 0, \quad (5.57)$$

womit die ursprüngliche Entropieproduktion explizit vorgeschrieben ist

$$\sigma = - \frac{\partial \Lambda^\varepsilon}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X_\alpha} q_\alpha \right) \equiv - \frac{\partial \Lambda^\varepsilon}{\partial \theta} \operatorname{sp} \mathcal{K} (\operatorname{Grad} \theta \otimes \operatorname{Grad} \theta). \quad (5.58)$$

Das Minimum dieser Funktion $\sigma = 0$ definiert den **thermodynamischen Gleichgewichtszustand**. Im Fall des thermoelastischen Materials ist dieser Zustand durch eine einzige Bedingung

$$\text{Grad } \theta = 0 \Rightarrow \mathbf{q} = 0 \Rightarrow \mathbf{h} = 0 \quad (5.59)$$

bestimmt, vorausgesetzt, daß die **Wärmeleitungsmatrix \mathcal{K} nicht-singulär** ist.

$$\det \mathcal{K} \neq 0. \quad (5.60)$$

Die Bedingung (5.57)₁ zeigt, daß Λ^ε dieselbe Funktion in Gleichgewichtszuständen ist, wie im Falle $\mathbf{q} \neq 0$. Die klassische Gleichgewichtsthermodynamik enthält die folgende Gleichung

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta}, \quad \theta > 0, \quad (5.61)$$

wobei θ die absolute Temperatur bezeichnet. Nach (5.54)₃ gilt deswegen

$$\Lambda^\varepsilon = \frac{1}{\theta}. \quad (5.62)$$

Nun können wir alle Ergebnisse zusammenstellen

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (5.63)$$

$$\varepsilon = \psi - \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$

$$\mathbf{T} = 2\varrho_0 \mathbf{F} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}}, \quad (5.64)$$

$$\mathbf{h} = \frac{1}{\theta} \mathbf{q}, \quad (5.65)$$

$$\sigma = \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \text{grad } \theta \geq 0 \Rightarrow \mathcal{K} \text{ - positiv-definit,} \quad (5.66)$$

wobei

$$\psi := \varepsilon - \theta \eta = \psi(\mathbf{C}, \theta), \quad (5.67)$$

die sogenannte **Helmholtzsche freie Energie** ist. Besonders wichtig ist das Ergebnis (5.64). Es beweist, daß der zweite Hauptsatz das Problem der konstitutiven Gleichungen für den Spannungstensor zu einer skalaren konstitutiven Gleichung für ψ vereinfacht. Die Thermodynamik gibt keinen Hinweis, wie diese Gleichung aussehen sollte, aber diese Aufgabe ist selbstverständlich nicht so anspruchsvoll wie sechs Gleichungen für \mathbf{T} zu finden.

Das zweite wichtige Ergebnis (5.65) ist in der älteren Literatur häufig von Anfang an angenommen. Dann wird die Ungleichung (5.39) die **Clausius-Duhem-Ungleichung** genannt. Die Verallgemeinerung stammt von I. Müller, der auch einige Beispiele erörtert hat, bei denen diese Gestalt der Ungleichung nicht richtig ist.

Die Bedingung (5.59) für den Gleichgewichtszustand deutet an, daß Grad θ allein entscheidet, ob ein Zustand zu einem thermodynamischen Gleichgewicht gehört. Offensichtlich ist die freie Energie ψ eine Gleichgewichtsfunktion, weil sie von Grad θ unabhängig ist. Folglich werden auch die Entropie, die innere Energie und der Spannungstensor Gleichgewichtsfunktionen. Praktisch bedeutet das, daß man diese Funktionen nur bei Abwesenheit des Temperaturgradienten bestimmen muß, was eine wesentliche Vereinfachung verursacht.

Schließlich zeigen wir noch eine kompakte Form der Gln. (5.63), (5.64), die bei einer Transformation der konstitutiven Variablen eine wesentliche Rolle spielt. Wir haben

$$\begin{aligned} d\psi &= d\varepsilon - \theta d\eta - \eta d\theta = \\ &= \frac{\partial\psi}{\partial\theta} d\theta + \text{sp} \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{C}} d\mathbf{C} = \\ &= -\eta d\theta + \text{sp} \frac{1}{2\rho_0} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} d\mathbf{C}, \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\boxed{d\eta = \frac{1}{\theta} \left(d\varepsilon - \text{sp} \frac{1}{2\rho_0} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} d\mathbf{C} \right)}. \quad (5.68)$$

Dieses Ergebnis nennt man die **Gibbssche Gleichung**. Sie ist die Grundlage der ganzen Gleichgewichtsthermodynamik der thermoelastischen Werkstoffe. Die Gestalt dieser Gleichung hängt freilich von konstitutiven Annahmen ab und sie wird deswegen unterschiedlich für verschiedene Werkstoffe ausfallen.

Sehr häufig wird behauptet, daß die Gl. (5.68) der zweite Hauptsatz der Thermodynamik selbst ist. Unsere Überlegungen haben bewiesen, daß der zweite Hauptsatz mehr Informationen ergibt als die Gibbsche Gleichung allein.

5.5 Thermodynamik der wärmeleitenden viskosen Flüssigkeit

Die Ergebnisse für diesen Fall lassen sich einfacher herleiten, wenn wir die Beziehungen des Kapitels 5.2 vorläufig nicht vollständig benutzen. Wir lassen nämlich die beliebige Abhängigkeit von \mathbf{D} zu. Nach (5.49) erhalten wir

$$\begin{aligned} &\left(\rho \frac{\partial\eta}{\partial\rho} - \Lambda^\varepsilon \rho \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} - \Lambda^\theta \right) \dot{\rho} + \text{sp} \left(\rho \frac{\partial\eta}{\partial\mathbf{D}} - \Lambda^\varepsilon \rho \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{D}} \right) \dot{\mathbf{D}} + \\ &\quad + \text{sp} (\Lambda^\varepsilon \boldsymbol{\sigma} - \Lambda^\theta \boldsymbol{\rho} \mathbf{I}) \mathbf{D} + \\ &\quad + \left(\rho \frac{\partial\eta}{\partial\theta} - \Lambda^\varepsilon \rho \frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta} \right) \dot{\theta} - \Lambda^\nu \cdot (\rho \dot{\mathbf{v}} - \text{div} \boldsymbol{\sigma}) - \\ &\quad - \text{sp} (\boldsymbol{\chi} - \Lambda^\varepsilon \boldsymbol{\kappa}) (\text{grad} \otimes \text{grad}) \theta - \\ &\quad - (\text{div} \boldsymbol{\kappa} - \Lambda^\varepsilon \text{div} \boldsymbol{\kappa}) \cdot \text{grad} \theta \geq 0, \end{aligned} \quad (5.69)$$

wobei

$$\boldsymbol{\chi} := \chi_1 \mathbf{I} + \chi_2 \mathbf{D} + \chi_3 \mathbf{D}^2, \quad (5.70)$$

und wir die Symmetrie des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ benutzt haben. Die Ungleichung ist linear bezüglich

$$\dot{\rho}, \dot{\mathbf{D}}, \dot{\theta}, \dot{\mathbf{v}}, (\text{grad} \otimes \text{grad}) \theta \quad (5.71)$$

und aus dem selben Grund wie bei den thermoelastischen Werkstoffen erhalten wir

$$\rho \left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho} - \Lambda^\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) = \Lambda^\varepsilon, \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{D}} - \Lambda^\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{D}} = 0, \quad (5.73)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \Lambda^\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} = 0, \quad (5.74)$$

$$\Lambda^\nu = 0, \quad (5.75)$$

$$\chi = \Lambda^\varepsilon \kappa. \quad (5.76)$$

Es bleibt die folgende Ungleichung

$$\text{sp}(\Lambda^\varepsilon \boldsymbol{\sigma} - \Lambda^\varepsilon \rho \mathbf{I}) \mathbf{D} + (\text{grad } \Lambda^\varepsilon) \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad (5.77)$$

Gleichzeitig

$$\frac{\partial \Lambda^\varepsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial \Lambda^\varepsilon}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \frac{\partial \Lambda^\varepsilon}{\partial D_{mn}} \frac{\partial D_{mn}}{\partial x_k} + \frac{\partial \Lambda^\varepsilon}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + \frac{\partial \Lambda^\varepsilon}{\partial \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_l} \right)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k \partial x_l}. \quad (5.78)$$

Die Ungleichung (5.77) ist infolgedessen linear bezüglich

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_k}, \frac{\partial D_{mn}}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k \partial x_l} \quad (5.79)$$

und wir erhalten

$$\Lambda^\varepsilon = \Lambda^\varepsilon(\theta). \quad (5.80)$$

In diesem Fall ist die Entropieproduktion durch die Formel gegeben

$$\sigma = \text{sp}(\Lambda^\varepsilon \boldsymbol{\sigma} - \Lambda^\varepsilon \rho \mathbf{I}) \mathbf{D} + \frac{d\Lambda^\varepsilon}{d\theta} \mathbf{q} \cdot \text{grad } \theta \geq 0 \quad (5.81)$$

die ihr Minimum $\sigma = 0$ erreicht, wenn gleichzeitig

$$\mathbf{D} = 0 \quad \text{und} \quad \text{grad } \theta = 0. \quad (5.82)$$

Dann ist die Beziehung (5.74) identisch mit der entsprechenden Beziehung der Gleichgewichtsthermodynamik, vorausgesetzt

$$\Lambda^\varepsilon = \frac{1}{\theta}. \quad (5.83)$$

Dieses Ergebnis gilt nicht nur im thermodynamischen Gleichgewicht, sondern auch für \mathbf{D} und $\text{grad } \theta$, die die Bedingung (5.82) nicht erfüllen. Das ist die Folge des Ergebnisses (5.80). Mit Hilfe der Helmholtzschen freien Energie

$$\psi := \varepsilon - \theta \eta \quad (5.84)$$

lassen sich die Beziehungen (5.72–5.76), (5.81) folgenderweise schreiben

$$\Lambda^e = -\frac{\rho}{\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \varepsilon = \psi - \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (5.85)$$

$$\psi = \psi(\rho, \theta), \quad (5.86)$$

$$\chi = \frac{1}{\theta} \kappa \equiv \frac{1}{\theta} (\kappa_1 \mathbf{I} + \kappa_2 \mathbf{D} + \kappa_3 \mathbf{D}^2) \Rightarrow \mathbf{h} = \frac{1}{\theta} \mathbf{q}, \quad (5.87)$$

$$\text{sp} \left(\boldsymbol{\sigma} + \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{I} \right) \mathbf{D} + \frac{1}{\theta} \text{sp} \kappa (\text{grad } \theta \otimes \text{grad } \theta) \geq 0, \quad (5.88)$$

$$\text{sp} \left(\boldsymbol{\sigma} + \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{I} \right) \mathbf{D} \geq 0. \quad (5.89)$$

Offenbar folgt die Bedingung für κ positiv definit zu sein, nicht aus der Ungleichung (5.88), wenn κ von \mathbf{D} abhängig ist. Wir erhalten nur

$$\text{sp} \kappa (\mathbf{D} = 0) (\text{grad } \theta \otimes \text{grad } \theta) \geq 0. \quad (5.90)$$

Die wichtigste Beobachtung in unserem Fall ist, daß die Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ im Gegensatz zum thermoelastischen Material **nicht die Ableitung** der freien Energie ψ ist.

Untersuchen wir jetzt die Ungleichung (5.89). Offensichtlich hat die Funktion

$$\text{sp} \left(\boldsymbol{\sigma} + \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{I} \right) \mathbf{D} \quad (5.91)$$

das Minimum im thermodynamischen Gleichgewicht: $\mathbf{D} = 0$, $\text{grad } \theta = 0$. Notwendigerweise muß dann gelten

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{D}} \text{sp} \left(\boldsymbol{\sigma} + \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{I} \right) \mathbf{D} \Big|_{\mathbf{D}=0} = \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{D} = 0) + \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{I} = 0. \quad (5.92)$$

Das bedeutet, daß die Gleichgewichtsspannung $\boldsymbol{\sigma} (\mathbf{D} = 0)$

$$\boldsymbol{\sigma} (\mathbf{D} = 0) =: -p(\rho, \theta) \mathbf{I} = -\rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{I}. \quad (5.93)$$

ein Potential hat. Den Rest der Spannung für das Ungleichgewicht

$$\mathbf{V}(\rho, \mathbf{D}, \theta) := \boldsymbol{\sigma}(\rho, \mathbf{D}, \theta) + p(\rho, \theta) \mathbf{I} \quad (5.94)$$

nennt man häufig die **viskose Spannung**. Nun läßt sich die Ungleichung (5.89) in der Gestalt schreiben

$$\text{sp} \mathbf{V} \mathbf{D} \geq 0. \quad (5.95)$$

Die linke Seite beschreibt die **Leistung** der viskosen Spannung und die Ungleichung bedeutet, daß diese Spannung die Arbeit der äußeren Kräfte benötigt (**dissipiert**), wenn der Geschwindigkeitsgradient nicht verschwindet.

Von besonderer praktischer Bedeutung ist die lineare Theorie

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \lambda I^D \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}, \text{ d. h. } \Sigma_1 = -p(\rho, \theta) + \lambda(\rho, \theta) I^D, \\ &\Sigma_2 = 2\mu(\rho, \theta), \Sigma_3 = 0. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Diese Flüssigkeiten werden **Navier-Stokes-Fourier Flüssigkeiten** genannt. Nach Ungleichung (5.95)

$$\lambda I^{D^2} + 2\mu \operatorname{sp} D^2 \geq 0. \quad (5.97)$$

Es folgt nach einfacher Rechnung

$$\mu \geq 0, \quad 3\lambda + 2\mu \geq 0. \quad (5.98)$$

Das sind die klassischen **Duhem-Stokes-Bedingungen**.

6 Werkstoffe mit inneren Zwangsbedingungen

Die bisherigen Überlegungen beruhen auf der Annahme, daß ein Körper beliebige Bewegungen zuläßt. Sehr häufig bedingen Besonderheiten des Gefüges Beschränkungen der Bewegungsfreiheit. Durch diese **Zwangsbedingungen** lassen sich einige Probleme einfacher lösen, als es der Fall mit der vollständigen Unabhängigkeit der Verzerrungskomponenten wäre. Solche Beispiele, wie Inkompressibilität oder Undehnbarkeit der Fasern bei faserverstärkten Werkstoffe, beweisen, daß die praktische Anwendung der Zwangsbedingungen von großer Bedeutung ist.

Wir untersuchen hier nur die kinematischen Zwangsbedingungen. Die thermischen Beschränkungen wurden auch teilweise untersucht, aber die thermodynamischen Grundlagen erwecken in diesem Fall immer noch einige Zweifel.

Die einfachste mechanische Zwangsbedingung ist durch eine skalare Funktion dargestellt

$$\forall \mathbf{F} : \bar{J}(\mathbf{F}) = 0. \quad (6.1)$$

Die materielle Objektivität verlangt, daß diese Funktion nur von dem Streck \mathbf{U} , oder gleichwertig von dem Cauchy-Green-Verzerrungstensor \mathbf{C} abhängig sein kann

$$\forall \mathbf{C} : J(\mathbf{C}) = 0. \quad (6.2)$$

Ein beliebiger Zeitverlauf der Verformung muß dann die Bedingung

$$\dot{J}(\mathbf{C}) = \text{sp} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \dot{\mathbf{C}} = 2 \text{ sp} \left(\mathbf{F} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \right) \mathbf{D} = 0. \quad (6.3)$$

für alle zulässigen Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren \mathbf{D} erfüllen.

Wir untersuchen nun die thermodynamischen Bedingungen, die aus dem zweiten Hauptsatz für thermoelastisches Material in Lagrangescher Beschreibung folgen. Die grundlegenden Gleichungen haben die Gestalt

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} &= \text{Div } \mathbf{T} \\ \rho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{Div } \mathbf{q} &= \text{sp } \mathbf{T} \dot{\mathbf{F}}^T \equiv \text{sp} (\mathbf{T} \mathbf{F}^T) \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

wobei wir die Symmetrie des Tensors $\mathbf{T}\mathbf{F}^T$ benutzt haben. Die konstitutiven Gleichungen in der materiellen objektiven Form werden in folgender Gestalt angenommen

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{F}\mathbf{T}(\mathbf{C}, \theta), \\ \varepsilon &= e(\mathbf{C}, \theta), \\ \mathbf{q} &= -\mathcal{K}(\mathbf{C}, \theta)\text{Grad } \theta.\end{aligned}\quad (6.5)$$

Der zweite Hauptsatz beruht auf der Entropiegleichung

$$\rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{Div } \mathbf{h} \geq 0 \quad (6.6)$$

mit

$$\eta = \eta(\mathbf{C}, \theta) \quad \text{und} \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{q}}{\theta}. \quad (6.7)$$

Die letzte Beziehung kann man leicht beweisen, wenn wir die konstitutive Gleichung für \mathbf{h} in der Form (5.39), Kapitel 5, zulassen. Wir tun das nicht, um die wesentlichen Punkte, die mit Zwangsbedingungen zusammenhängen, im Auge zu behalten. Es gilt

$$\begin{aligned}\rho_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \Lambda^\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{sp} \left(2\rho_0 \mathbf{F} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T - \Lambda^\varepsilon 2\rho_0 \mathbf{F} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T + \right. \\ \left. + \Lambda^\varepsilon \mathbf{T}\mathbf{F}^T - \Lambda^{\mathcal{J}} 2\mathbf{F} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \right) \mathbf{D} + \\ \left. + \left(\frac{1}{\theta} - \Lambda^\varepsilon \right) \text{Div } \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \text{Grad } \theta \geq 0\end{aligned}\quad (6.8)$$

wobei $\Lambda^{\mathcal{J}}$ Lagrangescher Multiplikator für die Bedingung (6.3) ist

$$\Lambda^{\mathcal{J}} = \Lambda^{\mathcal{J}}(\mathbf{C}, \theta) \quad (6.9)$$

und die Ungleichung (6.8) für beliebige Bewegungen (ohne Zwangsbedingungen!) und beliebige Temperaturen gelten soll. Wir erhalten

$$\Lambda^\varepsilon = \frac{1}{\theta}, \quad (6.10)$$

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \varepsilon = \psi - \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (6.11)$$

$$\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{n} = 2\rho \mathbf{F} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T, \quad (6.12)$$

$$\text{sp } \mathcal{K}(\text{Grad } \theta \otimes \text{Grad } \theta) \geq 0 \quad (6.13)$$

wobei

$$\psi := \varepsilon - T\eta = \psi(\mathbf{C}, \theta) \quad (6.14)$$

$$\boldsymbol{\sigma} := \frac{1}{J} \mathbf{T}\mathbf{F}^T, \quad \rho = \frac{\rho_0}{J}, \quad (6.15)$$

$$\mathbf{n} := p\mathbf{F} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T, \quad p := 2\frac{\theta}{J} \Lambda^{\mathcal{J}}. \quad (6.16)$$

Offensichtlich ist die Cauchysche Spannung σ vollständig durch die freie Helmholtzsche Energie nicht mehr bestimmt. Der Tensor \mathbf{n} , den man die **Zwangsreaktionsspannung** nennt, folgt weder aus der konstitutiven Gl. (6.14) noch aus der Zwangsbedingung (6.9) allein. Die Gl. (6.16) läßt den Λ^J -Multiplikator unbestimmt, was gleichzeitig auch den Koeffizienten p unbestimmt läßt. Diese Eigenschaft erleichtert die Bearbeitung einiger Probleme, die wir am Anfang dieses Kapitels angedeutet haben.

Die Gl. (6.3) führt zur Bedingung

$$\text{sp } \mathbf{n}D = 0. \quad (6.17)$$

Das bedeutet, daß die Reaktionsspannung für eine reale Verformung keine Arbeit leistet. Auch die Bedingung (6.13) wird durch Zwangsbedingungen nicht modifiziert. Es folgt, daß diese Bedingungen **nicht-dissipativ** sind.

Im Fall mehrerer Zwangsbedingungen

$$\forall C : \mathcal{J}^{(\alpha)}(C) = 0, \alpha = 1, \dots, a \quad (6.18)$$

folgt für die Reaktionsspannung

$$\mathbf{n} = \sum_{\alpha=1}^a p^{(\alpha)} \mathbf{F} \frac{\partial \mathcal{J}^{(\alpha)}}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T, \quad (6.19)$$

mit $p^{(\alpha)}, \alpha = 1, \dots, a$, unbestimmten Koeffizienten.

Beispiele:

1) Das Material wird **inkompressibel** genannt, wenn es nur die isochore Bewegung zuläßt:

$$\mathcal{J}(C) = (\det \mathbf{F})^2 - 1 \equiv \det C - 1, \quad (6.20)$$

Das heißt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{C}} = C^{-1} \det C &\Rightarrow \mathbf{n} = p \mathbf{F} (C^{-1} \det C) \mathbf{F}^T = \\ &= p \mathbf{F} (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \\ &= p \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^T \\ &= p \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Folglich ist

$$\mathbf{n} = -p \mathbf{I}, \quad p := -p \quad (6.22)$$

und p ein beliebiger Skalar. Das ist das bekannte Ergebnis von **Poincaré**, daß die Spannung im inkompressiblen Material mit einer Genauigkeit bis auf einen unbekanntem Skalar p aus der Bewegung folgt.

2) Die **Undehnbarkeit** in der materiellen Richtung \mathbf{K} mit $|\mathbf{K}| = 1$ wird durch die folgende Funktion beschrieben

$$\mathcal{J}(C) = (\mathbf{F}\mathbf{K}) \cdot (\mathbf{F}\mathbf{K}) - 1 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{C}\mathbf{K} - 1, \quad (6.23)$$

Es folgt

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{K} \otimes \mathbf{K} \Rightarrow \mathbf{n} = p \mathbf{F} (\mathbf{K} \otimes \mathbf{K}) \mathbf{F}^T, \quad (6.24)$$

d. h.

$$n = N \left(\frac{FK}{|FK|} \right) \otimes \left(\frac{FK}{|FK|} \right), \quad N := p|FK|^2. \quad (6.25)$$

Dieses Ergebnis von **Adkins und Rivlin** zeigt, daß die Zugspannung N in der Richtung der Undehnbarkeit nicht durch die Bewegung bestimmt wird.

3) Der **starre Körper** ist durch die Undehnbarkeit in einer **beliebigen** Richtung definiert. Es bedeutet nach dem letzten Ergebnis, daß der ganze Spannungstensor durch die Bewegung des Körpers nicht bestimmt wird.

7 Gummiähnliche Werkstoffe

7.1 Einführung

Nach Entwicklung der geometrischen Grundlagen der nicht-linearen Kontinuumsmechanik am Anfang des XIX. Jahrhunderts wurde hauptsächlich die lineare Verformungstheorie erforscht. Die neuen Impulse für die Untersuchungen der nicht-linearen Effekte wurden von der Strömungsmechanik einerseits und von der Gummiindustrie andererseits in den vierziger Jahren unseres Jahrhunderts gegeben. Gummi und gummiähnliche Kunststoffe sind bis heute die wichtigsten Anwendungen der nicht-linearen Elastizitätstheorie. In diesem Kapitel wollen wir einige Beispiele darstellen, die in diesem Zusammenhang erforscht wurden.

Wir untersuchen nur isothermische Prozesse in einem isotropen Werkstoff. Die Annahme der konstanten Temperatur gibt verhältnismäßig schlecht die Vorgänge im Gummi wieder. In diesem Zusammenhang sollten die Ergebnisse dieses Kapitels nur als eine grobe Näherung betrachtet werden.

Die materielle Isotropie bedeutet, daß Materialeigenschaften unabhängig von der Richtung in der Referenzkonfiguration sein müssen. Nicht alle gummiähnliche Werkstoffe erfüllen diese Bedingung, jedoch ist diese Annahme sehr häufig sinnvoll.

Unter dieser Annahme folgen alle Materialeigenschaften aus der Helmholtzschen freien Energie ψ

$$\psi = \psi(\mathbf{C}), \quad (7.1)$$

die die Isotropiebedingung

$$\forall \mathbf{H}, \mathbf{H}^T = \mathbf{H}^{-1} : \psi(\mathbf{C}) = \psi(\mathbf{HCH}^T), \quad (7.2)$$

erfüllen muß. In Gl. (7.2) bezeichnet \mathbf{H} eine beliebige orthogonale Matrix, die einer Drehung der Materialrichtungen entspricht. Gl. (7.2) bedeutet, daß ψ nur von solchen Komponenten der Matrix \mathbf{C} abhängig sein kann, die sich mit der Drehung nicht ändern. Offensichtlich sind das die Invarianten dieser Matrix.

$$I^{\mathbf{C}} = \text{sp } \mathbf{C}, \quad II^{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} \left((I^{\mathbf{C}})^2 - \text{sp } \mathbf{C}^2 \right), \quad III^{\mathbf{C}} = \det \mathbf{C}. \quad (7.3)$$

Es folgt

$$\psi = \psi(I^{\mathbf{C}}, III^{\mathbf{C}}, III^{\mathbf{C}}). \quad (7.4)$$

Die Beispiele, die wir weiter betrachten, lassen sich einfacher formulieren, wenn wir den rechten Cauchy-Green-Tensor B statt C benutzen. Es gilt

$$\begin{aligned} I^C &= \text{sp } C = \text{sp } F^T F = \text{sp } F F^T = \text{sp } B = I^B && =: I, \\ II^C &= \frac{1}{2} \left((I^C)^2 - \text{sp } C^2 \right) = \frac{1}{2} \left((I^B)^2 - \text{sp } F^T F F^T F \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left((I^B)^2 - \text{sp } F F^T F F^T \right) = \frac{1}{2} \left((I^B)^2 - \text{sp } B^2 \right) = II^B && =: II, \\ III^C &= \det C = \det F^T F = (\det F)^2 = \det F F^T = \det B = III^B && =: III, \end{aligned} \quad (7.5)$$

und

$$C = F^T F = F^{-1} B F \Rightarrow C^{-1} = F^{-1} B^{-1} F. \quad (7.6)$$

Nach Gl. (5.64) läßt sich jetzt der Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned} T &= 2\rho_0 F \frac{\partial \psi}{\partial C} = 2\rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial C} + \frac{\partial \psi}{\partial II} \frac{\partial II}{\partial C} + \frac{\partial \psi}{\partial III} \frac{\partial III}{\partial C} \right) = \\ &= 2\rho_0 F \left(\frac{\partial \psi}{\partial I} I + \frac{\partial \psi}{\partial II} (II - C) + \frac{\partial \psi}{\partial III} III C^{-1} \right) = \\ &= 2\rho_0 \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial I} + \frac{\partial \psi}{\partial II} I \right) B - \frac{\partial \psi}{\partial II} B^2 + \frac{\partial \psi}{\partial III} III I \right] F^{-T}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Gleichzeitig folgt aus dem Cayley-Hamilton Theorem

$$B^2 = IB - III + III B^{-1}. \quad (7.8)$$

Dann erhalten wir

$$\sigma = \frac{1}{J} T F^T = \mathfrak{S}_0 I + \mathfrak{S}_1 B + \mathfrak{S}_{-1} B^{-1}, \quad (7.9)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_0 &:= 2\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial II} II + \frac{\partial \psi}{\partial III} III \right) = \mathfrak{S}_0(I, II, III), \\ \mathfrak{S}_1 &:= 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial I} = \mathfrak{S}_1(I, II, III), \\ \mathfrak{S}_{-1} &:= -2\rho \frac{\partial \psi}{\partial II} III = \mathfrak{S}_{-1}(I, II, III), \end{aligned} \quad (7.10)$$

und die Beziehung (4.49) zwischen Piola-Kirchhoffscher Spannung T und Cauchyscher Spannung σ benutzt wurde.

Offensichtlich ist eine Helmholtzsche freie Energie ψ , als gegebene Funktion der drei Invarianten I, II, III , hinreichend, um die Materialkoeffizienten $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_{-1}$ zu bestimmen. Sollten jedoch diese Koeffizienten direkt gemessen werden, ist es nützlich, sich die folgenden Eigenschaften zu merken. Wenn k^B der Eigenvektor des Tensors B ist, dann wird

$$\sigma k^B = \mathfrak{S}_0 k^B + \mathfrak{S}_1 (\lambda^B) k^B + \mathfrak{S}_{-1} \left(\frac{1}{\lambda^B} \right) k^B, \quad (7.11)$$

wobei λ^B den entsprechenden Eigenwert des Tensors B bezeichnet. Diese Beziehung bedeutet, daß die **Eigenvektoren des Verzerrungstensors B mit Eigenvektoren des Cauchyschen Spannungstensors σ übereinstimmen** und die Eigenwerte λ^σ des Spannungstensors σ durch die folgenden Gleichungen wiedergegeben werden

$$\begin{aligned} \lambda_{(i)}^\sigma &= \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 \lambda_{(i)}^B + \mathfrak{S}_{-1} \frac{1}{\lambda_{(i)}^B}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \mathfrak{S}_r &= \mathfrak{S}_r(I, II, III), \quad r = 0, 1, -1, \\ I &= \lambda_{(1)}^B + \lambda_{(2)}^B + \lambda_{(3)}^B, \quad II = \lambda_{(1)}^B \lambda_{(2)}^B + \lambda_{(1)}^B \lambda_{(3)}^B + \lambda_{(2)}^B \lambda_{(3)}^B, \\ III &= \lambda_{(1)}^B \lambda_{(2)}^B \lambda_{(3)}^B. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Es ist selbstverständlich, daß die drei Beziehungen (7.12)₁ eindeutig die **konstitutiven Gleichungen des isotropen Werkstoffes** bestimmen.

Gummi und viele gummiähnliche Werkstoffe können als inkompressibel betrachtet werden. Wir haben in Kapitel 6 gezeigt, daß die Cauchysche Spannung in solchem Fall durch die folgende Beziehung gegeben wird

$$\sigma = -p\mathbf{I} + 2\rho F \frac{\partial \psi}{\partial C} F^T, \quad \det F = 1 \tag{7.13}$$

wobei p den Druck bezeichnet, der durch konstitutive Gleichung nicht vorgeschrieben ist. Die freie Energie ψ für isotrope Werkstoffe ist dann nur von zwei Invarianten abhängig ($III = 1$)

$$\psi = \psi(I, II) \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial C} = \frac{\partial \psi}{\partial I} \mathbf{I} + \frac{\partial \psi}{\partial II} (II - C). \tag{7.14}$$

Es folgt

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \mathfrak{S}_1 B + \mathfrak{S}_{-1} B^{-1}, \tag{7.15}$$

mit

$$\mathfrak{S}_1 := 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial I} = \tilde{\mathfrak{S}}_1(I, II), \quad \mathfrak{S}_{-1} := -2\rho \frac{\partial \psi}{\partial II} = \tilde{\mathfrak{S}}_{-1}(I, II). \tag{7.16}$$

Einen der wichtigsten Sonderfälle erhalten wir aus der Gl. (7.15) unter der zusätzlichen Annahme der konstanten Koeffizienten \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_{-1} . Man schreibt dann

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \mu \left(\frac{1}{2} + \beta\right) B - \mu \left(\frac{1}{2} - \beta\right) B^{-1}, \quad \mu, \beta - \text{konstant} \tag{7.17}$$

wobei

$$\beta := \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_{-1}}{\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_{-1}}, \quad \mu := \mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_{-1}. \tag{7.18}$$

Den Werkstoff (7.17) nennt man **Mooney-Rivlin-Material**. Die entsprechende Helmholtzsche freie Energie hat dann die Gestalt

$$\varrho\psi = \frac{1}{2}\mu \left[\left(\frac{1}{2} + \beta\right)(I - 3) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)(II - 3) \right], \quad (7.19)$$

wobei die Integrationskonstante so gewählt ist, daß ψ einen Null-Wert im unverformten Zustand $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ erreicht. Wenn wir zusätzlich verlangen, daß der unverformte Zustand das Minimum der freien Energie erzeugt, dann folgt

$$\mu > 0, \quad -\frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{1}{2}. \quad (7.20)$$

Diese Beschränkungen haben wichtige Folgen für Wellenausbreitungsbedingungen, die wir in dieser Arbeit nicht untersuchen werden. Im Sonderfall $\beta = \frac{1}{2}$ definiert (7.17) **neo-Hookesches Material**.

Die Anwendung des Werkstoffmodells (7.17) auf dem Gebiet der Gummibeschreibung hat eine sehr umfangreiche Literatur (z.B. L.R.G. TRELOAR, The Physics of Rubber Elasticity, Clarendon Press, Oxford, 1975), die wir hier nicht erörtern möchten.

7.2 Homogene Verzerrungen

Wir untersuchen jetzt einige Lösungen der Bewegungsgleichungen für den statischen Fall

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (7.21)$$

mit der Cauchyschen Spannung (7.6) für kompressible Stoffe und (7.15) für inkompressible Stoffe.

Beispiele:

1) **Isochore Streckung.** Der rechte Cauchy-Green Verzerrungstensor \mathbf{B} ist dann (siehe: (2.18))

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (7.22)$$

und die Cauchysche Spannung

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_0 + \lambda^2 \mathfrak{S}_1 + \frac{1}{\lambda^2} \mathfrak{S}_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{S}_0 + \frac{1}{\lambda} \mathfrak{S}_1 + \lambda \mathfrak{S}_{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{S}_0 + \frac{1}{\lambda} \mathfrak{S}_1 + \lambda \mathfrak{S}_{-1} \end{pmatrix}, \quad (7.23)$$

mit $-p$ anstatt der \mathfrak{S}_0 -Funktion im Fall des inkompressiblen Werkstoffes.

Nehmen wir an, daß die Seitenwände der Probe nicht belastet werden. Dann kann man entweder \mathfrak{S}_0 oder p eliminieren

$$\mathfrak{S}_0 = - \left(\frac{1}{\lambda} \mathfrak{S}_1 + \lambda \mathfrak{S}_{-1} \right) \quad (7.24)$$

und die Spannungskomponente in der Belastungsrichtung ergibt sich in der Gestalt

$$\sigma_{11} = \frac{K}{A} = \lambda \frac{K}{A_0} = \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left(\mathfrak{S}_1 - \frac{1}{\lambda} \mathfrak{S}_{-1} \right). \quad (7.25)$$

Abbildung (7.1) zeigt den Verlauf der Kraft K für das neo-hookesche Material:

$$\mathfrak{S}_1 = \mu = \text{const}, \quad \mathfrak{S}_{-1} = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}, \quad (7.26)$$

d.h.

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{B}. \quad (7.27)$$

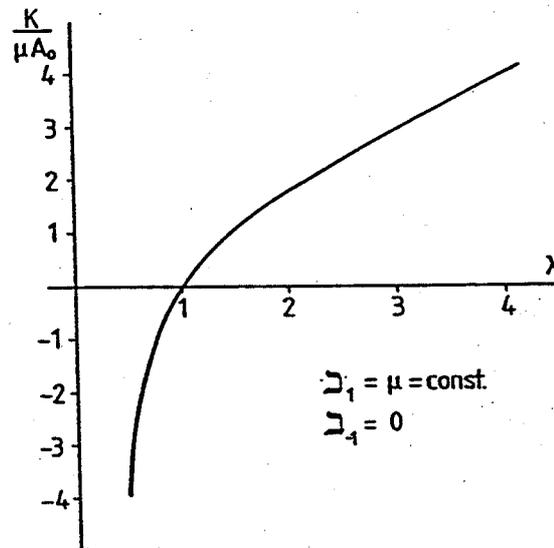


Abb. 7.1: Verlauf der Kraft K für das neo-hookesche Material.

Offensichtlich ist der beliebige konstante Streck λ die Lösung der Gl. (7.21) mit den Randbedingungen, z.B. in der folgenden Gestalt

$$\begin{aligned} \sigma_{11}|_{X=0} = \sigma_{11}|_{X=L} = \lambda \frac{K}{A_0}, \quad \sigma_{12}|_{X=0} = \sigma_{13}|_{X=0} = \sigma_{12}|_{X=L} = \sigma_{13}|_{X=L} = 0 \\ \sigma_{22}|_{(Y,Z) \in \Sigma} = \sigma_{33}|_{(Y,Z) \in \Sigma} = \sigma_{12}|_{(Y,Z) \in \Sigma} = \sigma_{23}|_{(Y,Z) \in \Sigma} = 0 \end{aligned} \quad (7.28)$$

wobei Σ die Seitenfläche der Probe bezeichnet.

2) Einfache Scherung. Nach Gl. (2.27) ist

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \tan^2 \varphi & \tan \varphi \\ 0 & \tan \varphi & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\tan \varphi \\ 0 & -\tan \varphi & 1 + \tan^2 \varphi \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

und wir erhalten

$$\sigma = \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1(1 + \tan^2 \varphi) + \mathfrak{S}_{-1} & (\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_{-1}) \tan \varphi \\ 0 & (\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_{-1}) \tan \varphi & \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_{-1}(1 + \tan^2 \varphi) \end{pmatrix}, \quad (7.30)$$

mit

$$I = II = 3 + \tan^2 \varphi, \quad III = 1 \Rightarrow \mathfrak{S}_\Gamma = \mathfrak{S}_\Gamma(\tan^2 \varphi) \quad (7.31)$$

für $\Gamma = 0, 1, -1$ im Fall des kompressiblen Materials und $\mathfrak{S}_0 \rightarrow -p$, $\Gamma = 1, -1$ im Fall des inkompressiblen Materials.

Die Schubspannung

$$\sigma_{12} = \mu(\kappa^2)\kappa, \quad \mu(\kappa^2) := \mathfrak{S}_1(\kappa^2) - \mathfrak{S}_{-1}(\kappa^2), \quad \kappa := \tan \varphi \quad (7.32)$$

ist, wie erwartet, eine ungerade Funktion der Scherung $\kappa = (\tan \varphi)$. Wenn das Schubmodul μ eine differenzierbare Funktion von κ ist, dann muß jede Abweichung von der klassischen linearen Theorie mindestens quadratisch in κ verlaufen:

$$\mu(\kappa^2) = \mu(\kappa = 0) + o(\kappa^2). \quad (7.33)$$

Wir haben auch

$$\frac{1}{3} \text{sp } \sigma = (\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_{-1}) + \frac{1}{3}(\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_{-1})\kappa^2. \quad (7.34)$$

Die Bedingung

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{1}{3} \text{sp } \sigma \equiv \lim_{\kappa \rightarrow 0} (\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_{-1}) = 0 \quad (7.35)$$

bedeutet deswegen, daß der Grenzfall $\kappa \rightarrow 0$ dem spannungsfreien unverformten Zustand entspricht. Für eine differenzierbare Funktion $(\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_{-1})$ in der Umgebung von $\kappa = 0$ erhalten wir

$$\left| \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_{-1}}{\kappa^2} \right| < \infty \quad (7.36)$$

und je nachdem welches Vorzeichen die mittlere Normalspannung hat

$$\frac{1}{3} \frac{\text{sp } \sigma}{\kappa^2} = \frac{\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_{-1}}{\kappa^2} + (\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_{-1}) \quad (7.37)$$

wird die Probe unter Scherspannung entweder expandieren oder kontrahieren. Diese Eigenschaft nennt man **Kelvinschen Effekt**¹.

Das andere Merkmal der großen Scherung ist die notwendige Ungleichheit der Normalspannungen σ_{22} und σ_{33} . Es folgt aus (7.30)

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} \Rightarrow \mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_{-1} = 0 \Rightarrow \mu = 0, \quad (7.38)$$

was die Abwesenheit der Schubspannung bedeuten würde. Diese Differenz zwischen Normalspannungen ist als **Poyntingscher Effekt** bekannt.

¹“But it is possible that a distorting stress may produce, in a truly isotropic solid condensation or dilatation in proportion to the square of its value: and it is possible that such effects may be sensible in India rubber or cork, or other bodies susceptible of great deformations or compressions with persistent elasticity” (W. THOMSON (Lord KELVIN) and P.G. TAIT; Treatise on Natural Philosophy, Part I, Cambridge, footnote to §679, 1867).

Freilich kann man die beiden Effekte nur bei großen Verzerrungen sichtbar machen, weil sowohl $\text{sp } \sigma$ als auch σ_{22} und σ_{33} quadratisch in κ verlaufen.

Die beiden Beispiele gehören der Klasse der sogenannten **universellen Lösungen** an. Das sind alle solche Verformungen, die Lösungen der statischen Bewegungsgleichungen ohne äußere Kräfte (7.21) sind und gleichzeitig nicht von materiellen Eigenschaften abhängen.

Diese Definition führt für kompressible Werkstoffe (7.6) zur Bedingung, daß die Koeffizienten von $\mathfrak{S}_0, \frac{\partial \mathfrak{S}_0}{\partial I}, \frac{\partial \mathfrak{S}_0}{\partial II}, \frac{\partial \mathfrak{S}_0}{\partial III}, \dots, \frac{\partial \mathfrak{S}_{-1}}{\partial III}$ verschwinden müssen. Wir erhalten 12 Bedingungen für 6 Komponenten des Verzerrungstensors B . Zusätzlich muß B eine positiv-definite und integrierbare Matrix sein. Es wurde von J. Ericksen bewiesen, daß nur homogene Verformungen $B = \text{const}$ alle diese Bedingungen erfüllen.

Die Lage ist viel komplizierter für inkompressible Werkstoffe. In diesem Fall ist die Spannung durch die Gl. (7.15) wiedergegeben und wir erhalten

$$-\text{grad } p + \text{div} (\mathfrak{S}_1 B + \mathfrak{S}_{-1} B^{-1}) = 0. \quad (7.39)$$

Es folgt

$$\text{rot div} (\mathfrak{S}_1 B + \mathfrak{S}_{-1} B^{-1}) = 0. \quad (7.40)$$

d.h.

$$(\mathfrak{S}_1 B_{kl} + \mathfrak{S}_{-1} B_{kl}^{-1})_{,lm} = (\mathfrak{S}_1 B_{ml} + \mathfrak{S}_{-1} B_{ml}^{-1})_{,lk}. \quad (7.41)$$

Diese Gleichung führt zu 12 Bedingungen für eine universelle Lösung mit der zusätzlichen Zwangsbedingung $\det B = 1$. Rivlin hat gezeigt, daß es außer der homogenen Lösung $B = \text{const}$ eine Reihe heterogener und universeller Lösungen gibt, die eine große praktische Bedeutung haben.

7.3 Heterogene Verzerrungen

Alle heterogenen universellen Lösungen für das elastische isotrope Material wurden von J. Ericksen in folgende Familien eingeteilt:

Familie 1: Biegung, Streckung und Scherung eines Blocks.

Es ist günstig, Zylinderkoordinaten (r, ϑ, z) für den Bewegungsraum zu wählen (siehe Anhang). Dann beschreibt die folgende Bewegungsfunktion diese Familie

$$r = \sqrt{2AX}, \quad \vartheta = BY, \quad z = \frac{Z}{AB} - BCY, \quad AB \neq 0, \quad (7.42)$$

mit A, B, C konstant. Der Verzerrungstensor B ist dann

$$\begin{aligned} (B^{kl}) &= \begin{pmatrix} B^{rr} & B^{r\vartheta} & B^{rz} \\ B^{r\vartheta} & B^{\vartheta\vartheta} & B^{\vartheta z} \\ B^{rz} & B^{\vartheta z} & B^{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & B^2 & -B^2 C \\ 0 & -B^2 C & B^2 C^2 + \frac{1}{A^2 B^2} \end{pmatrix}, \\ (B_{kl}^{-1}) &= \begin{pmatrix} \frac{r^2}{A^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{B^2} + A^2 B^2 C^2 & A^2 B^2 C \\ 0 & A^2 B^2 C & A^2 B^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.43)$$

und

$$\begin{aligned} I &= B_k^k = \frac{A^2}{r^2} + B^2 r^2 + B^2 C^2 + \frac{1}{A^2 B^2}, \\ II &= \frac{1}{2} [(B_k^k)^2 - B_l^k B_k^l] = \frac{r^2}{A^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{B^2} + A^2 B^2 C^2 \right) + A^2 B^2, \\ III &= 1. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Familie 2: Geradebiegen, Streckung und Scherung eines Zylindersektors.

In diesem Fall benutzen wir die Zylinderkoordinaten (R, Θ, Z) in der Referenzkonfiguration und kartesische Koordinaten im Bewegungsraum. Die Bewegungsfunktion hat die Gestalt

$$x = \frac{1}{2} AB^2 R^2, \quad y = \frac{\Theta}{AB}, \quad z = \frac{Z}{B} + \frac{C\Theta}{AB}, \quad AB \neq 0 \quad (7.45)$$

mit A, B, C konstant. Es folgt

$$\begin{aligned} (B^{kl}) &= \begin{pmatrix} 2AB^2x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2Ax} & \frac{C}{2Ax} \\ 0 & \frac{C}{2Ax} & \frac{1}{B^2} + \frac{C^2}{2Ax} \end{pmatrix}, \\ (B_{kl}^{-1}) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2AB^2x} & 0 & 0 \\ 0 & 2Ax + B^2C^2 & -B^2C \\ 0 & -B^2C & B^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.46)$$

und

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{B^2} + 2AB^2x + \frac{1}{2Ax}(1 + C^2), \\ II &= B^2(1 + C^2) + 2Ax + \frac{1}{2AB^2x}, \\ III &= 1. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Familie 3: Aufweitung, Biegung, Streckung, Torsion und Scherung eines zylindrischen Keils.

Sowohl die materiellen Koordinaten (R, Θ, Z) als auch die räumlichen Koordinaten (r, ϑ, z) werden nun die Zylinderkoordinaten. Die Bewegung ist dann folgendermaßen definiert

$$r = \sqrt{AR^2 + B} \quad \vartheta = C\Theta + DZ \quad z = E\Theta + FZ, \quad A(CF - DE) = 1. \quad (7.48)$$

Der entsprechende Verzerrungstensor hat die Form

$$\begin{aligned} (B^{kl}) &= \begin{pmatrix} \frac{A^2 R^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C}{R^2} + D^2 & \frac{CE}{R^2} + DF \\ 0 & \frac{CE}{R^2} + DF & \frac{E^2}{R^2} + F^2 \end{pmatrix}, \\ (B_{kl}^{-1}) &= \begin{pmatrix} \frac{r^2}{A^2 R^2} & 0 & 0 \\ 0 & A^2(E^2 + F^2 R^2) & -A^2(CE + DFR^2) \\ 0 & -A^2(CE + DFR^2) & A^2(C^2 + D^2 R^2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.49)$$

mit folgenden Invarianten

$$\begin{aligned} I &= \frac{A^2 R^2}{r^2} + r^2 \left(\frac{C^2}{R^2} + D^2 \right) + F^2 + \frac{E^2}{R^2}, \\ II &= \frac{r^2}{A^2 R^2} + \frac{A^2}{r^2} (E^2 + F^2 R^2) + A^2 (C^2 + D^2 R^2), \\ III &= 1. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Familie 4: Aufblasen und Umklappen einer Kugelschale.

Wir benutzen in diesem Fall die Kugelkoordinaten (R, Φ, Θ) in der Referenzkonfiguration und (r, φ, ϑ) in der augenblicklichen Konfiguration. Dann ist

$$r = (\pm R^3 + A)^{\frac{1}{3}} \quad \theta = \pm \Theta \quad \varphi = \Phi. \quad (7.51)$$

Es folgt

$$(B_i^k) = \begin{pmatrix} \frac{R^4}{r^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{R^2} \end{pmatrix}, \quad (B_i^{-1k}) = \begin{pmatrix} \frac{r^4}{R^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{r^2} \end{pmatrix} \quad (7.52)$$

und

$$I = \frac{R^4}{r^4} + 2 \frac{r^2}{R^2}, \quad II = \frac{r^4}{R^4} + 2 \frac{R^2}{r^2}. \quad (7.53)$$

Familie 5: Aufblasen, Streckung und Scherung eines Zylinders.

Wir benutzen wieder die Zylinderkoordinaten und erhalten

$$r = AR, \quad \vartheta = B \log R + C\Theta, \quad z = DZ, \quad A^2 CD = 1. \quad (7.54)$$

Es gilt dann

$$(B^{kl}) = \begin{pmatrix} A^2 & \frac{AB}{R} & 0 \\ \frac{AB}{R} & \frac{B^2+C^2}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & D^2 \end{pmatrix}, \quad (B_{kl}^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{B^2+C^2}{A^2 C^2} & -\frac{rB}{A^2 C^2} & 0 \\ -\frac{rB}{A^2 C^2} & \frac{r^2}{A^2 C^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D^2} \end{pmatrix}, \quad (7.55)$$

und

$$I = A^2 + D^2 + A^2(B^2 + C^2), \quad II = A^2 [D^2 + A^2 C^2 + B^2 D^2 + B^2 C^2]. \quad (7.56)$$

J. Ericksen hat versucht, alle heterogenen universellen Lösungen für das inkompressible elastische Material zu finden. Die obigen fünf Familien scheinen nach dieser Untersuchung die Möglichkeiten auszuschöpfen.

Wir schließen dieses Kapitel mit einer Analyse eines wichtigen Beispiels.

Beispiel:

Torsion des Zylinders.

Dieses Problem gehört der Familie 3 an mit den folgenden Werten der Konstanten

$$A = 1, B = 0, C = 1, E = 0, F = 1 \quad (7.57)$$

d.h.

$$r = R, \vartheta = \Theta + DZ, z = Z. \quad (7.58)$$

Offensichtlich bezeichnet nun die Konstante D das Verdrehen des Zylinders. Die physikalischen Koordinaten des Spannungstensors σ (siehe Anhang) müssen in diesem Fall die folgenden Gleichungen erfüllen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\sigma_{(r)(r)} + \frac{1}{r}(\sigma_{(r)(r)} - \sigma_{(\vartheta)(\vartheta)}) &= 0, \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sigma_{(r)(\vartheta)}) - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \vartheta} &= 0, \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{(r)(z)}) - \frac{\partial p}{\partial z} &= 0,\end{aligned}\quad (7.59)$$

wobei

$$\sigma_{(r)(r)} = \sigma^{rr}, \quad \sigma_{(r)(\vartheta)} = r\sigma^{r\vartheta}, \quad \sigma_{(\vartheta)(\vartheta)} = r^2\sigma^{\vartheta\vartheta}, \quad \sigma_{(r)(z)} = \sigma^{rz}. \quad (7.60)$$

Die zusätzliche Annahme

$$\sigma_{(r)(\vartheta)} = 0, \quad \sigma_{(r)(z)} = 0 \quad (7.61)$$

fordert $p = p(r)$. Es folgt

$$\sigma_{(r)(r)} = -\int \frac{\sigma_{(r)(r)} - \sigma_{(\vartheta)(\vartheta)}}{r} dr, \quad \sigma_{(\vartheta)(\vartheta)} = \frac{d}{dr}(r\sigma_{(r)(r)}). \quad (7.62)$$

Mit Hilfe der Beziehung (7.49) können wir nun die konstitutive Gl. (7.15) in der folgenden Gestalt schreiben

$$\left(\sigma_{(k)(l)}\right) = \begin{pmatrix} -p + \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -p + \mathfrak{S}_1(1 + D^2r^2) + \mathfrak{S}_{-1} & Dr(\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_{-1}) \\ 0 & Dr(\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_{-1}) & -p + \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_{-1}(1 + D^2r^2) \end{pmatrix} \quad (7.63)$$

mit den Materialkoeffizienten

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_1(D^2r^2), \quad \mathfrak{S}_{-1} = \mathfrak{S}_{-1}(D^2r^2), \quad I = II = D^2r^2. \quad (7.64)$$

Der Vergleich der Gl. (7.63) mit (7.30) zeigt, daß die einfache Scherung und die Torsion des Zylinders lokal äquivalent sind. Die Messungen der Funktionen \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_{-1} bei Scherung — z.B. durch Messung der Schubspannungen und der Normalspannung σ_{11} als Funktion von $\kappa = \tan \varphi$ — bestimmen vollständig die Beziehungen (7.63).

Wir können auch umgekehrt verfahren und die Messungen am Zylinder durchführen. In diesem Fall ist es günstig, die zwei folgenden Begriffe zu benutzen.

Das Schubkräftepaar

$$T := \int r\sigma_{(\vartheta)(z)}2\pi r dr \quad (7.65)$$

beschreibt die äußere Beanspruchung, die notwendig für das Verdrehen des Zylinders ist. Wir erhalten

$$T = 2\pi D \int r^3 \mu(D^2r^2) dr, \quad \mu(D^2r^2) = \mathfrak{S}_1(D^2r^2) - \mathfrak{S}_{-1}(D^2r^2). \quad (7.66)$$

Die Normalkraft

$$N := 2\pi \int \sigma_{(z)(z)}r dr \quad (7.67)$$

spiegelt den Poyntingschen Effekt bei Torsion wieder. Es gilt

$$N = -\pi D^2 \int r^3 (\mathfrak{S}_1 - 2\mathfrak{S}_{-1}) dr. \quad (7.68)$$

Man kann zeigen, daß $N < 0$. Das bedeutet, daß die Torsion des inkompressiblen Zylinders mit freien Flächen eine Ausdehnung proportional zu D^2 verursacht.

8 Schallwellen

8.1 Einführung

Die Beispiele für Lösungen der Feldgleichungen, die wir bisher dargestellt haben, haben kaum die dynamische Struktur der Bilanzgleichungen wiedergespiegelt. Die parametrische Zeitabhängigkeit der Verzerrung, wie beispielsweise $\lambda(t)$ oder $\varphi(t)$, enthält keinen Einfluß der Beschleunigung. In diesem Sinne sind diese Lösungen **statisch**. In diesem Kapitel wollen wir einige Eigenschaften des **dynamischen** Problems untersuchen. Wir beschränken unsere Überlegungen auf die Theorie des thermoelastischen Festkörpers. Die Einzelheiten der Invarianzbedingungen spielen für die Herleitung der grundlegenden Gleichungen eine sekundäre Rolle. Deswegen werden nur die Ergebnisse der Thermodynamik in der Gestalt (vgl. (5.64), (5.63))

$$\mathbf{T} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}}, \quad \varepsilon = \psi - \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \psi = \psi(\mathbf{F}, \theta) \quad (8.1)$$

benutzt.

Die Bilanzgleichungen (5.4), (5.6) lassen sich nun als Feldgleichungen für f_k und θ schreiben

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2} &= A_{k\alpha\beta} \frac{\partial^2 f_l}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} + \Gamma_{k\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial X_\alpha}, \\ \rho_0 c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} - \rho_0 \theta \Gamma_{k\alpha} \frac{\partial^2 f_k}{\partial t \partial X_\alpha} - \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \left[\kappa_{\alpha\beta} \frac{\partial \theta}{\partial X_\beta} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (8.2)$$

wobei

$$\begin{aligned} A_{k\alpha\beta} &:= \frac{\partial^2 \psi}{\partial F_{k\alpha} \partial F_{l\beta}} = A_{k\alpha\beta}(\mathbf{F}, \theta), \\ \Gamma_{k\alpha} &:= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial F_{k\alpha}} = \Gamma_{k\alpha}(\mathbf{F}, \theta), \\ c_v &:= -\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = c_v(\mathbf{F}, \theta), \\ \kappa_{\alpha\beta} &= \kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{F}, \theta). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Die Matrix $\Gamma_{k\alpha}$ beschreibt offensichtlich die Kopplung der mechanischen und der thermischen Vorgänge, weil die erste Gl. (8.2)₁ der klassischen Gleichung für Verschiebungen entspricht und die zweite Gl. (8.2)₂ die allgemeine Gestalt der Gleichung für Wärmeleitung in thermoelastischen Werkstoffen ist. Die Größe c_v ist die **spezifische Wärme**.

Das System der Differentialgleichungen (8.2) ist **quasi-linear**, d.h. die Koeffizienten sind von den höchsten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}, \frac{\partial^2 f_k}{\partial X_\alpha \partial t}, \frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2}, \frac{\partial \theta}{\partial X_\alpha}, \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (8.4)$$

unabhängig.

Es ist kaum möglich, die Lösung des beliebigen Anfangs- und Randwertproblems für das Gleichungssystem (8.2) zu finden. Jedoch lassen sich einige Eigenschaften der **isothermischen dynamischen Prozesse** relativ einfach untersuchen. Wir beschränken uns nun auf solche Prozesse, d.h. wir werden die folgende Gleichung

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2} = A_{k\alpha l \beta} \frac{\partial^2 f_l}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}, \quad A_{k\alpha l \beta} = A_{k\alpha l \beta}(\mathbf{F}), \quad (8.5)$$

untersuchen.

8.2 Wellenfront

Die üblichen Methoden der Analyse dynamischer Probleme beruhen auf der **Fourier-schen** Entwicklung der gesuchten Größe. Im Fall des Kontinuums entspricht dieses Verfahren der Zerlegung beliebiger Wellen auf die **monochromatische** Komponente. Die Quasilinearität der Gl. (8.5) macht eine solche Analyse unmöglich. Jedoch kann man mit Hilfe der Gl. (8.5) die Ausbreitung der Störungen recht gut beschreiben, ohne die vollständige Lösung zu kennen. Wir erwarten nämlich, daß die Störung des Gleichgewichtes im Augenblick $t = 0$ auf dem Gebiet B_0 sich auf dem Gebiet G_t für $t > 0$ ausbreitet (Abb. 8.1). Diese Ausbreitung bedeutet, daß immer neue Teilchen aus dem Ruhezustand geworfen werden. Das heißt, daß die Gebiete G_t **nicht materiell** sind. Wir versuchen nun, die Bewegung der Grenze S_t dieses Gebietes zu beschreiben. Sind nun $s^K, K = 1, 2$ die Koordinaten auf der Fläche S_t . Die **Gleichung dieser Fläche** kann man auf zwei verschiedene Weisen formulieren: entweder

$$\boxed{X_\alpha = \mathcal{X}_\alpha(s^K, t)} \quad (8.6)$$

wobei diese drei Funktionen das Teilchen X_α identifizieren, das von der Grenze S_t im Augenblick t umfaßt wird, oder

$$\boxed{t = \Psi(X_\alpha)} \quad (8.7)$$

wobei die Funktion Ψ die Zeit bestimmt, wenn die Fläche S_t das Teilchen X_α erreicht.

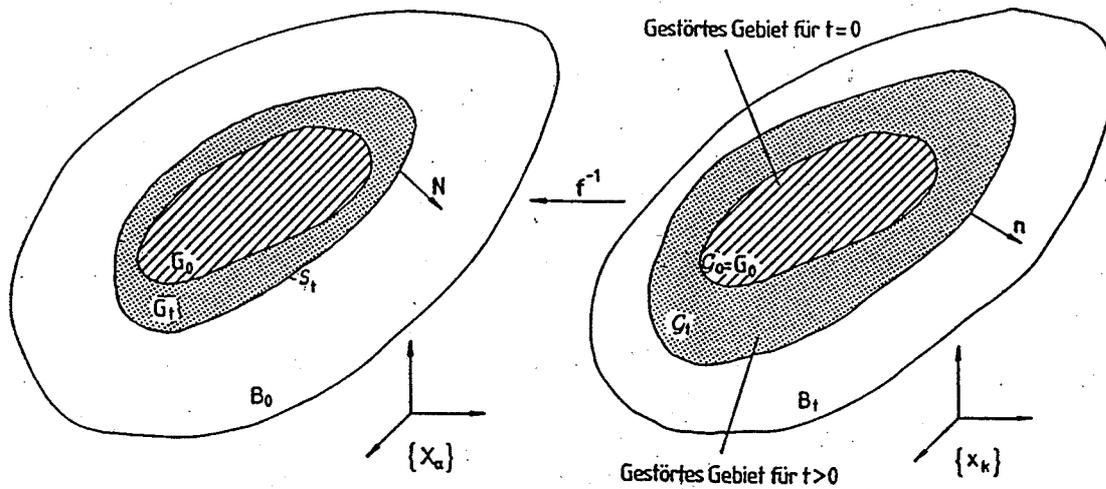


Abb. 8.1: Ausbreitung der Wellenfront

Wir haben

$$dt = \frac{\partial \Psi}{\partial X_\alpha} dX_\alpha = \frac{\partial \Psi}{\partial X_\alpha} \left[\frac{\partial X_\alpha}{\partial s^K} ds^K + \frac{\partial X_\alpha}{\partial t} dt \right]$$

d.h.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X_\alpha} \frac{\partial X_\alpha}{\partial s^K} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X_\alpha} \frac{\partial X_\alpha}{\partial t} = 1. \quad (8.8)$$

Offensichtlich definieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial X_\alpha}{\partial s^1}, \quad \frac{\partial X_\alpha}{\partial s^2}$$

die Tangentenvektoren zur Fläche S_t . Das bedeutet, daß die Beziehung (8.8)₁ die Orthogonalität des Vektors $\frac{\partial \Psi}{\partial X_\alpha}$ zur Fläche S_t verursacht. Wir bezeichnen mit

$$N_\alpha = \frac{\partial \Psi}{\partial X_\alpha} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial X_\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial X_\beta} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (8.9)$$

den Einheitsvektor normal zu dieser Fläche. Dann gilt

$$N_\alpha \frac{\partial X_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial \Psi}{\partial X_\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial X_\beta}}} =: U. \quad (8.10)$$

Die Größe U bezeichnet freilich die normale (d.h. in der Richtung des Vektors N) Geschwindigkeit der Fläche S_t bezüglich der Teilchen. Im Fall der stetigen Teilchengeschwindigkeit v auf der augenblicklichen Konfiguration der Fläche S_t läßt sich einfach beweisen (4.22), daß

$$U = c - n \cdot v \quad (8.11)$$

ist, wobei n , wie früher, den normalen Einheitsvektor zu der Fläche in der augenblicklichen Konfiguration bezeichnet. Wir betrachten weiter nur solche Flächen, die die Stetigkeitsbedingungen

$$[[f]] = 0, [[v]] = 0 \Rightarrow [[T]]N = 0 \quad (8.12)$$

erfüllen. Die Beschleunigung muß nicht stetig sein

$$[[a]] \neq 0 \quad (8.13)$$

und deswegen werden solche Flächen auch die **Beschleunigungswellen** genannt.

Wir untersuchen nun die Bedingungen, die Ableitungen beliebiger Funktionen auf der Fläche S_t erfüllen müssen. Wenn $G(X, t)$ eine Funktion ist, die auf beiden Seiten von S_t und auf S_t selbst differenzierbar ist. Dann lassen sich die Inkremente dieser Funktion zwischen zwei benachbarten Punkten A und B der Fläche und zwei benachbarten Punkten A^+ und B^+ in dem Gebiet auf der Vorderseite der Fläche (Abb. 8.2a) wie folgt schreiben

$$\begin{aligned} G(A, t) - G(B, t) &\cong \left(\frac{\partial G^+}{\partial s^K} \right) \Delta s^K, \\ G(A^+, t) - G(B^+, t) &\cong \left(\frac{\partial G}{\partial X_\alpha} \right)^+ \Delta X_\alpha, \end{aligned} \quad (8.14)$$

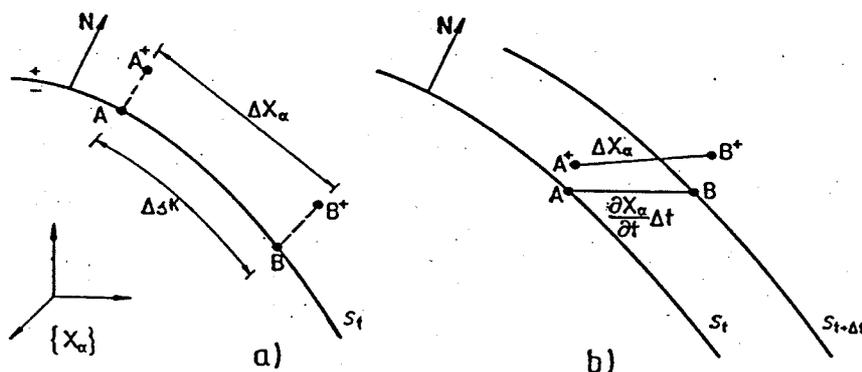


Abb. 8.2: a) zur räumlichen Unstetigkeit b) zur zeitlichen Unstetigkeit

wobei G^+ die Grenze der Funktion G auf der Vorderseite der Fläche bezeichnet mit

$$G^+ = G^+(X_\alpha(s^K, t), t), \quad \left(\frac{\partial G}{\partial X_\alpha}\right)^+ = \lim_{A^+ \rightarrow A} \frac{\partial G}{\partial X_\alpha}(A^+, t) \quad (8.15)$$

und, im Grenzübergang $A^+ \rightarrow A$, müssen die linken Seiten gleich sein. Es folgt

$$\left(\frac{\partial G^+}{\partial s^K}\right) \Delta s^K = \left(\frac{\partial G}{\partial X_\alpha}\right)^+ \Delta X_\alpha. \quad (8.16)$$

Im Grenzfall $\Delta s^K \rightarrow 0, \Delta X_\alpha \rightarrow 0$ erhalten wir gleichzeitig

$$\frac{\partial G^+}{\partial s^K} = \left(\frac{\partial G}{\partial X_\alpha}\right)^+ \frac{\partial X_\alpha}{\partial s^K}. \quad (8.17)$$

Eine ähnliche Überlegung für die Rückseite der Fläche ergibt

$$\frac{\partial G^-}{\partial s^K} = \left(\frac{\partial G}{\partial X_\alpha}\right)^- \frac{\partial X_\alpha}{\partial s^K}. \quad (8.18)$$

Aus (8.17) und (8.18) folgt dann

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial s^K} [[G]] = \left[\left[\frac{\partial G}{\partial X_\alpha} \right] \frac{\partial X_\alpha}{\partial s^K} \right]}. \quad (8.19)$$

Das heißt, daß die tangentielle Ableitung der Unstetigkeit $[[G]]$ und die tangentielle Komponente der Unstetigkeit der Ableitung gleich sein müssen. Dieses Ergebnis wird **Hadamardscher Satz über singuläre Flächen** genannt.

Die wichtigste Folge dieses Satzes erhält man für die stetige Funktionen. Denn

$$[[G]] = 0 \Rightarrow \left[\left[\frac{\partial G}{\partial X_\alpha} \right] \frac{\partial X_\alpha}{\partial s^K} \right] = 0. \quad (8.20)$$

Das bedeutet, daß der Sprung des Gradienten senkrecht in Bezug auf die Fläche ist

$$\boxed{\left[\left[\frac{\partial G}{\partial X_\alpha} \right] \right] = \mathcal{G} N_\alpha} \quad (8.21)$$

Die Größe \mathcal{G} nennt man die **Amplitude** der Unstetigkeit des Gradienten $\frac{\partial G}{\partial X_\alpha}$.

Ähnlich wird nun die Zeitableitung der Funktion G hergeleitet. Auf einer Seite ist die Zeitänderung der Grenzfunktion G^+ durch die Formel gegeben

$$G(B) - G(A) = \frac{\partial G^+}{\partial t} \Delta t. \quad (8.22)$$

Auf der anderen Seite ändert sich die Funktion G zwischen zwei Punkten A^+ und B^+ (Abb. 8.2b) folgendermaßen

$$\begin{aligned} G(B^+) - G(A^+) &= \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^+ \Delta t + \left(\frac{\partial G}{\partial X_\alpha}\right)^+ \Delta X^\alpha = \\ &= \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^+ \Delta t + \left(\frac{\partial G}{\partial X_\alpha}\right)^+ \frac{\partial X_\alpha}{\partial t} \Delta t, \end{aligned} \quad (8.23)$$

wobei wir angenommen haben, daß $A^+ \rightarrow A$ und $B^+ \rightarrow B$. In diesem Sinne werden $\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^+$ und $\left(\frac{\partial G}{\partial X_\alpha}\right)^+$ die Grenzwerte auf der Vorderseite der Fläche S_t . In dieser Grenze sind die linken Seiten der Regeln (8.22) und (8.23) gleich und es folgt

$$\frac{\partial G^+}{\partial t} = \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^+ + \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^+ \frac{\partial X_\alpha}{\partial t}. \quad (8.24)$$

Ähnlich erhalten wir für die Rückseite

$$\frac{\partial G^-}{\partial t} = \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^- + \left(\frac{\partial G}{\partial X_\alpha}\right)^- \frac{\partial X_\alpha}{\partial t}. \quad (8.25)$$

Dann gilt

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} [G] = \left[\frac{\partial G}{\partial t}\right] + \left[\frac{\partial G}{\partial X_\alpha}\right] \frac{\partial X_\alpha}{\partial t}.} \quad (8.26)$$

Diese Beziehung wird die **kinematische Kompatibilitätsbedingung** genannt. Der Sonderfall der stetigen Funktion G spielt eine besonders wichtige Rolle

$$[G] = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial G}{\partial t}\right] = -\left[\frac{\partial G}{\partial X_\alpha}\right] \frac{\partial X_\alpha}{\partial t}. \quad (8.27)$$

Die Anwendung des Ergebnisses (8.21) und der Definition (8.10) ergibt

$$\boxed{\left[\frac{\partial G}{\partial t}\right] = -GU.} \quad (8.28)$$

8.3 Ausbreitung der Beschleunigungswelle

Wir untersuchen nun die Bedingungen (8.12), die eine Beschleunigungswelle definieren. Die Stetigkeit der Geschwindigkeit erzeugt automatisch die **Stetigkeit des Deformationsgradienten**. Denn

$$[f_k] = 0 \quad \text{und} \quad \left[\frac{\partial f_k}{\partial t}\right] = -V_k U = 0 \Rightarrow V_k = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial f_k}{\partial X_\alpha}\right] = 0, \quad (8.29)$$

wobei wir die Bedingungen (8.21) und (8.28) angewendet haben, und V_k die Amplitude der Geschwindigkeitsunstetigkeit bezeichnet. Infolgedessen erhalten wir

$$\left[\frac{\partial f_k}{\partial X_\alpha}\right] = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial^2 f_k}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\right] = A_{k\alpha} N_\beta, \quad \left[\frac{\partial^2 f_k}{\partial X_\alpha \partial t}\right] = -A_{k\alpha} U, \quad (8.30)$$

$$\left[\frac{\partial f_k}{\partial t}\right] = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2}\right] = -B_k U, \quad \left[\frac{\partial^2 f_k}{\partial t \partial X_\alpha}\right] = B_k N_\alpha. \quad (8.31)$$

Gl. (8.30)₁ führt zur Symmetriebedingung

$$A_{k\alpha} N_\beta = A_{k\beta} N_\alpha \Rightarrow A_{k\alpha} = (A_{k\beta} N_\beta) N_\alpha. \quad (8.32)$$

Das bedeutet, daß $A_{k\alpha}$ proportional zu N_α sein muß

$$A_{k\alpha} = A_k N_\alpha. \quad (8.33)$$

Andererseits folgt aus Gl. (8.30)₂ und (8.31)₂

$$B_k N_\alpha = -A_{k\alpha} U = -A_k U N_\alpha \Rightarrow B_k = -A_k U. \quad (8.34)$$

Nun sind wir in der Lage, die Bedingungen (8.30) und (8.31) in der endgültigen Gestalt zu schreiben

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 f_k}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \right] &= A_k N_\alpha N_\beta, \quad \left[\frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2} \right] = A_k U^2, \\ \left[\frac{\partial^2 f_k}{\partial X_\alpha \partial t} \right] &= -A_k N_\alpha U. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Wir kehren nun zurück zur Bewegungsgleichung (8.5). Diese Gleichung gilt auf beiden Seiten der Fläche S_t . Im Grenzfall erhalten wir

$$\left[\frac{\partial^2 f_k}{\partial t} \right] = \left[A_{k\alpha\beta} \frac{\partial^2 f_l}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \right]. \quad (8.36)$$

Die Koeffizienten $A_{k\alpha\beta}$ sind die Funktionen des Deformationsgradienten $\frac{\partial f_k}{\partial X_\alpha}$ allein. Die Stetigkeit dieses Gradienten (8.29) verlangt

$$\left[A_{k\alpha\beta} \right] = 0. \quad (8.37)$$

Die Anwendung dieses Ergebnisses und der Beziehungen (8.35) in (8.36) führt zur Gleichung für die Amplitude der Unstetigkeit A_k

$$\left(Q_{kl} - U^2 \delta_{kl} \right) A_l = 0. \quad (8.38)$$

Es wurde definiert

$$Q_{kl} := A_{k\alpha\beta} N_\alpha N_\beta, \quad Q_{kl} = Q_{lk}. \quad (8.39)$$

Die letzte Symmetriebedingung des akustischen Tensors Q_{kl} folgt unmittelbar aus Definition (8.3)₁ des Tensors $A_{k\alpha\beta}$.

Gl. (8.38) wird die **Ausbreitungsbedingung der Beschleunigungswelle** genannt. Die Existenz der nichttrivialen Lösungen dieser Gleichung verlangt

$$\det(Q_{kl} - U^2 \delta_{kl}) = 0. \quad (8.40)$$

Das bedeutet, daß die **Ausbreitungsgeschwindigkeiten** U die **Eigenwerte** des akustischen Tensors Q sind. Wegen der Symmetrie dieses Tensors sind sie immer **real**. Die **akustischen Achsen** \mathcal{A} stimmen mit den **Eigenvektoren** des akustischen Tensors überein. Es gibt nur **drei linear unabhängige Wellen** mit gegenseitig orthogonalen akustischen Achsen.

Dieses Ergebnis wird **Fresnel-Hadamard Theorem** genannt.

Gl. (8.40) bestimmt die augenblickliche Konfiguration der Wellenfront S_t . Denn

$$Q_{kl} = A_{k\alpha\beta} N_\alpha N_\beta = A_{k\alpha\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial X_\beta} U^2, \quad (8.41)$$

wobei wir die Beziehungen (8.9) und (8.10) angewendet haben. Für $U \neq 0$ folgt dann

$$\det \left(A_{k\alpha\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial X_\beta} - \delta_{kl} \right) = 0. \quad (8.42)$$

Das ist eine nicht-lineare Differentialgleichung für die Funktion $\Psi(X_\alpha)$.

Für eine gegebene Lösung der Gl. (8.42) erhält man aus Gl. (8.38) nur die Richtung des Vektors \mathcal{A} . Die vollständige Amplitude der Unstetigkeit wird durch die Sprungbedingung (8.36) nicht bestimmt. Sie folgt jedoch aus der Feldgleichung (8.5), wenn wir diese Gleichung in der Umgebung der Fläche lösen. Eine systematische Methode für eine derartige Analyse wurde von Z. WESOŁOWSKI entworfen. Wir stellen hier nur die wesentlichen Merkmale dieser Methode dar.

Um die Zeitentwicklung der Fläche zu beschreiben ist es günstig, die folgende Parametrisierung der Zeit einzuführen

$$\Phi = t - \Psi(\mathbf{X}). \quad (8.43)$$

Offensichtlich entspricht $\Phi = 0$ der Fläche S_t . Für $\Phi > 0$ befindet sich \mathbf{X} im gestörten Gebiet (auf der Rückseite der Welle). Die Lösungen der Gl. (8.5) sollen die Unstetigkeiten der zweiten Ableitungen liefern. Lassen wir nun die Bewegungsfunktion von der ungestörten Konfiguration aus messen. Um die Herleitung zu vereinfachen nehmen wir an, daß diese Konfiguration mit der unverformten Konfiguration B_0 übereinstimmt. Die Lösung schreiben wir dann als eine formale Reihe

$$\begin{aligned} u_k(\mathbf{X}, t) &= f_k(\mathbf{X}, t) - \delta_{k\alpha} X_\alpha = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} S_{\nu+2}(\Phi(\mathbf{X}, t)) g_k^{(\nu)}(\mathbf{X}, t), \end{aligned} \quad (8.44)$$

wobei die Koeffizienten S_ν folgendermaßen definiert werden:

$$S_\nu(\Phi) := \frac{1}{\nu!} \left[\frac{1}{2} |\Phi| + \frac{1}{2} \Phi \right]^\nu \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (8.45)$$

und

$$S_0(\Phi) := \begin{cases} 1 & \text{für } \Phi > 0, \\ 0 & \text{für } \Phi < 0. \end{cases} \quad (8.46)$$

Die Funktionen $g_k^{(\nu)}(X_\alpha, t)$ sollen zweimal differenzierbar sein. Die Funktion u ist freilich die Verschiebung bezüglich der ungestörten Konfiguration.

Die Definitionen (8.45) und (8.46) lassen unmittelbar die folgende Rekursionsregel beweisen

$$\frac{dS_\nu}{d\Phi} = S_{\nu-1}. \quad (8.47)$$

Unter Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (8.44) kann man schreiben

$$\begin{aligned} u_k &= S_2 g_k^{(0)} + S_3 g_k^{(1)} + S_4 g_k^{(2)} + \dots \\ \frac{\partial u_k}{\partial t} &= S_1 g_k^{(0)} + S_2 \left(\frac{\partial g_k^{(0)}}{\partial t} + g_k^{(1)} \right) + S_3 \left(\frac{\partial g_k^{(1)}}{\partial t} + g_k^{(2)} \right) + \dots \\ \frac{\partial u_k}{\partial X_\alpha} &= S_1 \Phi_\alpha g_k^{(0)} + S_2 \left(\frac{\partial g_k^{(0)}}{\partial X_\alpha} + g_k^{(1)} \Phi_\alpha \right) + S_3 \left(\frac{\partial g_k^{(1)}}{\partial X_\alpha} + g_k^{(2)} \Phi_\alpha \right) + \dots \end{aligned} \quad (8.48)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} &= S_0 g_k^{(0)} + S_1 \left(2 \frac{\partial g_k^{(0)}}{\partial t} + g_k^{(1)} \right) + S_2 \left(\frac{\partial^2 g_k^{(0)}}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial g_k^{(1)}}{\partial t} + g_k^{(2)} \right) + \dots \\ \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} &= S_0 \Phi_\alpha \Phi_\beta g_k^{(0)} + S_1 \left(\Phi_{\alpha\beta} g_k^{(0)} + \Phi_\beta \frac{\partial g_k^{(0)}}{\partial X_\alpha} + \Phi_\alpha \frac{\partial g_k^{(0)}}{\partial X_\beta} + g_k^{(1)} \Phi_\alpha \Phi_\beta \right) + \\ &+ S_2 \left(\frac{\partial^2 g_k^{(0)}}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} + g_k^{(1)} \Phi_{\alpha\beta} + \Phi_\alpha \frac{\partial g_k^{(1)}}{\partial X_\beta} + \Phi_\beta \frac{\partial g_k^{(1)}}{\partial X_\alpha} + g_k^{(2)} \Phi_\alpha \Phi_\beta \right) + \dots \end{aligned} \quad (8.49)$$

wobei

$$\Phi_\alpha := \frac{\partial \Phi}{\partial X_\alpha} \equiv -\frac{\partial \Psi}{\partial X_\alpha}, \quad \Phi_{\alpha\beta} := \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}. \quad (8.50)$$

Mit Hilfe der Definition (8.45) folgt

$$[[S_0]] = -1, \quad [[S_\nu]] = 0 \quad \text{für } \nu > 0 \quad (8.51)$$

und

$$\begin{aligned} [[u_k]] &= 0, \quad \left[\frac{\partial u_k}{\partial t} \right] = 0, \quad \left[\frac{\partial u_k}{\partial X_\alpha} \right] = 0, \\ \left[\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \right] &= -g_k^{(0)}, \quad \left[\frac{\partial^2 u_k}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \right] = -\Phi_\alpha \Phi_\beta g_k^{(0)}. \end{aligned} \quad (8.52)$$

Das sind genau die Eigenschaften der Lösung, die wir uns auf der Wellenfront wünschen. Die Gl. (8.5) fordert jetzt

$$\begin{aligned} &S_0 (A_{k\alpha\beta} \Phi_\alpha \Phi_\beta - \delta_{kl}) g_l^{(0)} + \\ &+ S_1 \left[A_{k\alpha\beta} \left(\Phi_{\alpha\beta} g_l^{(0)} + \Phi_\beta \frac{\partial g_l^{(0)}}{\partial X_\alpha} + \Phi_\alpha \frac{\partial g_l^{(0)}}{\partial X_\beta} + g_l^{(1)} \Phi_\alpha \Phi_\beta \right) - 2 \frac{\partial g_k^{(0)}}{\partial t} - g_k^{(1)} \right] + \\ &+ \dots = 0. \end{aligned} \quad (8.53)$$

Das Verschwinden der Koeffizienten der Funktionen S_ν liefert die hinreichenden Bedingungen für die Erfüllung der Gl. (8.54). Nach der Definition (8.45) entspricht dieses Verfahren der **Störungsrechnung** mit kleinem Argument Φ , d.h. mit kleiner Abweichung der Zeit bei gegebenem Ort X von der Zeit $t = \Psi(X)$ der Begegnung mit der Welle. Es folgt

$$\left(A_{k\alpha\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial X_\beta} - \delta_{kl} \right) g_l^{(0)} = 0, \quad (8.54)$$

$$\begin{aligned} &\left(A_{k\alpha\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial X_\beta} - \delta_{kl} \right) g_l^{(1)} = \\ &= A_{k\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} g_l^{(0)} + \frac{\partial \Psi}{\partial X_\beta} \frac{\partial g_l^{(0)}}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial X_\alpha} \frac{\partial g_l^{(0)}}{\partial X_\beta} \right) + 2 \frac{\partial g_k^{(0)}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (8.55)$$

usw.

Die Anwendung der Beziehung (8.41) in Gl. (8.38) zeigt, daß diese Gleichung identisch mit Gl. (8.54) ist. Deswegen wird

$$\boxed{g_k^{(0)} = \kappa^{(0)} \mathcal{A}_k, \quad \kappa^{(0)} = \kappa^{(0)}(\mathbf{X}, t)}. \quad (8.56)$$

Wir können selbstverständlich den Vektor \mathcal{A} für die akustische Achse normieren:

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{A} = 1. \quad (8.57)$$

Dann ist $\kappa^{(0)}$ die wirkliche Amplitude der Unstetigkeit. Die Gleichung für diese Amplitude folgt aus Gl. (8.55). Wir multiplizieren diese Gleichung mit \mathcal{A}_k . Es gilt dann

$$\begin{aligned} A_{k\alpha l\beta} \mathcal{A}_k \left(\kappa^{(0)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \mathcal{A}_l + \frac{\partial \Psi}{\partial X_\beta} \frac{\partial (\kappa^{(0)} \mathcal{A}_l)}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial X_\alpha} \frac{\partial (\kappa^{(0)} \mathcal{A}_l)}{\partial X_\beta} \right) + \\ + 2 \frac{\partial}{\partial t} (\kappa^{(0)} \mathcal{A}_k) \mathcal{A}_k = 0, \end{aligned} \quad (8.58)$$

d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa^{(0)}}{\partial t} + \frac{1}{2} A_{k\alpha l\beta} \mathcal{A}_k \mathcal{A}_l \left(\frac{\partial \Psi}{\partial X_\beta} \frac{\partial \kappa^{(0)}}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \kappa^{(0)}}{\partial X_\beta} \right) + \\ + \frac{1}{2} \kappa^{(0)} \left[A_{k\alpha l\beta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \mathcal{A}_l + A_{k\alpha l\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial X_\beta} \frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial X_\alpha} + \right. \\ \left. + A_{k\alpha l\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial X_\beta} + 2 \frac{\partial \mathcal{A}_k}{\partial t} \right] \mathcal{A}_k = 0. \end{aligned} \quad (8.59)$$

Man kann diese Gleichung auch längs der Charakteristik formulieren. Dann ist

$$\frac{d\kappa^{(0)}}{d\tau} + \kappa^{(0)} P(\tau) = 0 \quad (8.60)$$

mit

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dX_\alpha}{d\tau} = \frac{1}{2} (A_{k\alpha l\beta} + A_{k\beta l\alpha}) \frac{\partial \Psi}{\partial X_\beta} \mathcal{A}_k \mathcal{A}_l, \quad (8.61)$$

$$P(\tau) := \frac{1}{2} A_{k\alpha l\beta} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \mathcal{A}_l + \frac{\partial \Psi}{\partial X_\beta} \frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial X_\beta} \right] \mathcal{A}_k. \quad (8.62)$$

Die Kurve, deren Tangentenvektor durch (8.61) definiert ist, liegt auf der Fläche S_t . Im Raum-Zeit Kontinuum ist der Normalenvektor zu dieser Fläche zum Beispiel als Gradient von Φ gegeben.

$$\left(\text{Grad } \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial X_\alpha}, -1 \right). \quad (8.63)$$

Das Skalarprodukt von (8.62) mit (8.60) ergibt

$$\frac{dX_\alpha}{d\tau} \frac{d\Psi}{dX_\alpha} - \frac{dt}{d\tau} = \left(A_{k\alpha l\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial X_\beta} - \delta_{kl} \right) \mathcal{A}_k \mathcal{A}_l \equiv 0 \quad (8.64)$$

wobei (8.38) und (8.41) benutzt wurden. Diese Bedingung heißt, daß die Kurve (8.61) auf jeder Stelle orthogonal zum Normalenvektor der Fläche S_t sein muß. Infolgedessen liegt auch diese Kurve vollständig auf S_t . Solche Kurven werden **Bicharakteristiken** genannt.

Die Lösung der Gl. (8.60) hat selbstverständlich die Gestalt

$$\kappa^{(0)} = C \exp \left[- \int_{\tau_0}^{\tau} P(\xi) d\xi \right], \quad C = \text{const.} \quad (8.65)$$

Wenn die Amplitude $\kappa^{(0)}$ auf einer Stelle der Bicharakteristik verschwindet, dann verschwindet sie auf der ganzen Kurve. Das ist eine wichtige Eigenschaft der Lösung (8.65) unabhängig davon, wie die Einzelheiten der Integrierung aussehen mögen.

Nun kann (8.55) nach $g_k^{(1)}$ gelöst werden. Wegen der Bedingung (8.42) bleibt nur der Teil des Vektors $g_k^{(1)}$, der orthogonal zum Vektor \mathcal{A} ist:

$$g_k^{(1)} = \kappa^{(1)} \mathcal{A}_k + k_k^{(1)}, \quad k^{(1)} \perp \mathcal{A}. \quad (8.66)$$

Die Größe $\kappa^{(1)}$ muß man aus der nächsten Gleichung in der Störungsentwicklung (8.54) bestimmen. Wir verzichten hier auf Einzelheiten. Als Endergebnis erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} g_k^{(\nu)} &= \kappa^{(\nu)} \mathcal{A}_k + k_k^{(\nu)}, \quad k^{(\nu)} \perp \mathcal{A}, \quad \nu = 1, 2, \dots \\ \frac{d\kappa^{(\nu)}}{d\tau} &= \kappa^{(\nu)} P(\tau) = K^{(\nu)}(\tau), \end{aligned} \quad (8.67)$$

wobei $K^{(\nu)}(\tau)$ in jedem Schritt eine bekannte Funktion bezeichnet.

Im Sinne der Beziehung (8.44) gibt die Lösung der Gl. (8.67) die Verschiebung u . Die oben skizzierte Störungsrechnung wurde erfolgreich bei einigen Problemen der Schallwellenausbreitung angewendet. Die Einzelheiten können in Originalveröffentlichungen nachgeschlagen werden.

Die Theorie der Beschleunigungswelle steht in enger Verbindung mit der allgemeinen Theorie der Schallwellen. Diese Verbindung entsteht aus folgendem Grund: Sind die Funktionen $u_k(\mathbf{X}, t)$ und deren Ableitungen bis zur Ordnung $n - 1$ auf der Fläche S_t stetig, während die Ableitungen

$$\underbrace{\frac{\partial^n u_k}{\partial X_\alpha \dots \partial X_\beta}}_n, \quad \underbrace{\frac{\partial^n u_k}{\partial t \partial X_\alpha \dots \partial X_\beta}}_{n-1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^n u_k}{\partial t^n} \quad (8.68)$$

unstetig sind, dann nennt man diese Singularität die **Welle n -ter Ordnung**. Die Amplitude $\mathcal{A}^{(n)}$ solcher Wellen erfüllt dieselbe Ausbreitungsbedingung wie die Beschleunigungswelle

$$\left(Q_{kl} - U^2 \delta_{kl} \right) \mathcal{A}_l^{(n)} = 0. \quad (8.69)$$

Offensichtlich haben alle diese Wellen dieselbe Ausbreitungsgeschwindigkeit U und dieselbe akustische Achse.

Die Schallwelle entsteht aus Wellen verschiedener Ordnung $n (n \geq 2)$ und hat auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit U , die wir aus diesem Grund die **Schallgeschwindigkeit** nennen.

Wie wir schon angedeutet haben, kann die quasilineare Gleichung mit Hilfe der klassischen Fourierschen Analyse nicht gelöst werden. Man kann jedoch eine ähnliche Methode anwenden, die die sogenannten **sinusoidale Wellen** definiert. Schreiben wir nämlich die Lösung für die Störung $u_k(\mathbf{X}, t)$ wieder in der Gestalt einer formalen Reihe (vergl. (8.44), erhalten wir

$$u_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_{\nu}(\Phi(\mathbf{X}, t)) g_k^{(\nu)}(\mathbf{X}, t). \quad (8.70)$$

Die Koeffizienten T_{ν} sollen die folgende Regel erfüllen

$$\frac{dT_{\nu}(\Phi)}{d\Phi} = T_{\nu-1}(\Phi). \quad (8.71)$$

Für diese Gestalt der Störung u_k kann man fast vollständig die obige Analyse wiederholen und eine Lösung, mindestens in einer Nachbarschaft der Fläche S_t , bilden. Zum Beispiel wird die Bedingung (8.71) von der folgenden Funktionsreihe erfüllt

$$T_{\nu}(\Phi) = \frac{1}{(i\omega)^{\nu}} e^{i\omega\Phi}. \quad (8.72)$$

In diesem Fall folgt die Lösung

$$u_k = \mathcal{A}_k \sqrt{M^2 + N^2} \cos[\omega(\Phi - t) - \alpha] \quad (8.73)$$

wobei

$$\begin{aligned} M &:= \kappa^{(0)} - \frac{1}{\omega^2} \kappa^{(2)} + \frac{1}{\omega^4} \kappa^{(4)} - \dots, \\ N &:= \frac{1}{\omega} \kappa^{(1)} - \frac{1}{\omega^3} \kappa^{(3)} + \frac{1}{\omega^5} \kappa^{(5)} - \dots, \\ \alpha &:= \arctan \frac{N}{M}. \end{aligned} \quad (8.74)$$

Die Lösung (8.73) nennt man die **sinusoidale Welle**, deren Amplitude $\mathcal{A}_k \sqrt{M^2 + N^2}$ ist und $\omega(\Phi - t) - \alpha$ die Phase definiert.

Offensichtlich ist im quasilinearen Fall eine beliebige Schallwelle **keine** Superposition der sinusoidalen (**monochromatischen**) Wellen.

Anhang Krummlinige Koordinaten

In diesem Anhang wird eine Beschreibung der krummlinigen Koordinaten im Euklidischen Raum gegeben.

Sind x_k , $k = 1, 2, 3$ rechtshändige kartesische Koordinaten, dann definieren die Funktionen

$$z^A = z^A(x_k), \quad A = 1, 2, 3, \quad \det \frac{\partial z^A}{\partial x_k} \neq 0, \quad (\text{A.1})$$

neue Koordinaten, vorausgesetzt, daß diese Funktionen stetig differenzierbar sind. In diesem Fall ist die Bedingung (Abb. A.1)

$$z^A = \text{const}, \quad (\text{A.2})$$

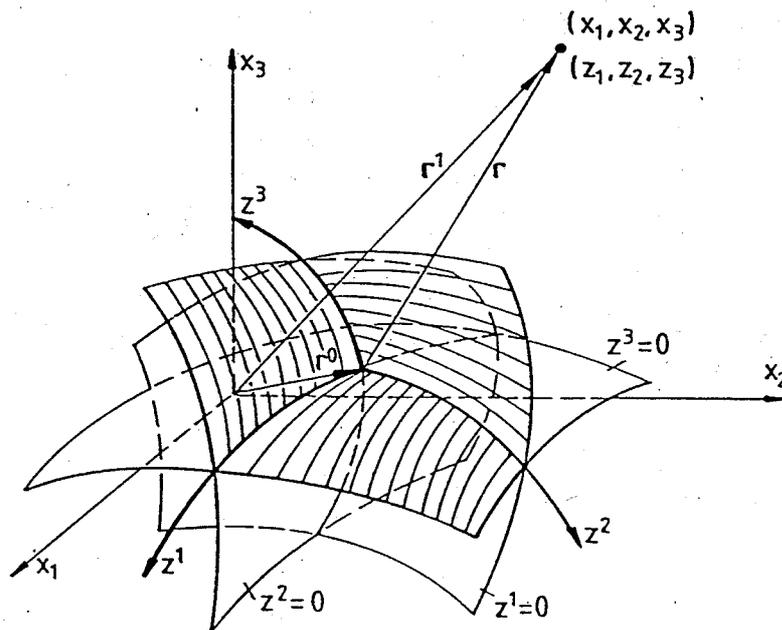


Abb. A.1: Krummlinige Koordinaten im Euklidischen Raum

für einen vorgeschriebenen Wert A ($A = 1, 2$ oder 3) gleichzeitig die Gleichung der Koordinatenfläche, die, im Gegensatz zu kartesischen Koordinaten, nicht unbedingt

eine Ebene sein muß. Der Schnitt zweier solcher Flächen mit unterschiedlichen Indizes A bestimmt die Kurven, die **Koordinatenlinien** genannt werden. So bestimmt z.B. der Schnitt der Flächen $A = 2$ und $A = 3$ die z^1 -Koordinatenlinie.

Im Euklidischen Raum kann die Gl. (A.1) mit Hilfe des Ortsvektors folgendermaßen geschrieben werden

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'(x_1, x_2, x_3) - \mathbf{r}^\circ \quad (\text{A.3})$$

wobei \mathbf{r}° die Verschiebung des Nullpunktes der Koordinatensysteme bezeichnet. Offensichtlich gilt für kartesische Koordinaten

$$\mathbf{r}'(x_1, x_2, x_3) = x_k \mathbf{e}_k \equiv x_k(z^1, z^2, z^3) \mathbf{e}_k. \quad (\text{A.4})$$

Das bedeutet, daß mit Hilfe der Bedingung (A.1) der neue Ortsvektor eine gegebene Funktion der Koordinaten z^A ist:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(z^1, z^2, z^3). \quad (\text{A.5})$$

Im Gegensatz zu den kartesischen Koordinaten werden die **Basisvektoren**

$$\mathbf{g}_A := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^A}(z^1, z^2, z^3) \quad (\text{A.6})$$

ortsabhängig. Nach der Definition der Koordinatenlinien sind diese Vektoren **tangential** zu diesen Linien. Beispielsweise ist \mathbf{g}_1 tangential zu der Linie: ($z^2 = \text{const}, z^3 = \text{const}$), was eine selbstverständliche Folge der Definition der partiellen Ableitung ist. Man kann nun den Vektor \mathbf{r} nach **Koordinaten** zerlegen

$$\tau_A := \mathbf{g}_A \cdot \mathbf{r} \quad (\text{A.7})$$

Es ist offensichtlich, daß der Vektor \mathbf{r} keine lineare Kombination der Vektoren \mathbf{g}_A mit den Koeffizienten τ_A sein kann. Wir können jedoch die anderen drei Vektoren \mathbf{g}^B , $B = 1, 2, 3$, definieren, die die folgende Bedingung erfüllen

$$\mathbf{g}_A \cdot \mathbf{g}^B = \delta_A^B, \quad (\text{A.8})$$

und den Ortsvektor als **lineare** Kombination schreiben

$$\mathbf{r} = r_B \mathbf{g}^B \Rightarrow \mathbf{r} \cdot \mathbf{g}_A = r_B \mathbf{g}^B \cdot \mathbf{g}_A = r_B \delta_A^B = r_A. \quad (\text{A.9})$$

Umgekehrt gilt mit Hilfe der folgenden Koordinaten

$$\boxed{r^A := g^A \cdot r} \quad (\text{A.10})$$

$$r = r^B g_B \Rightarrow r \cdot g^A = r^B g_B \cdot g^A = r^B \delta_B^A = r^A. \quad (\text{A.11})$$

Im allgemeinen werden die Koordinaten r^A ungleich den Koordinaten r_A sein und keine von beiden werden mit den Koordinaten z^A identisch.

Offensichtlich wird der Vektor g^1 orthogonal zu den Vektoren g_2 und g_3 . Das bedeutet, daß dieser Vektor orthogonal zu der Koordinatenfläche $z^1 = \text{const}$ sein muß. Diese Eigenschaft besitzen auch die übrigen Vektoren g^A . Sie sind orthogonal zu den Koordinatenflächen $z^A = \text{const}$.

Die Basisvektoren g_A werden kovariant und die Vektoren g^A kontravariant genannt. Die entsprechenden Koordinaten des Vektors r werden entsprechend kovariant (r_A -Koordinaten) und kontravariant (r^A -Koordinaten) genannt.

Die Beziehungen (A.7) und (A.10) können einfach verallgemeinert werden, um die Koordinaten des beliebigen Vektors u zu bestimmen. Denn

$$\boxed{u = u^A g_A = u_A g^A, \quad u^A := u \cdot g^A, \quad u_A := u \cdot g_A,} \quad (\text{A.12})$$

Selbstverständlich werden u^A die kontravarianten Koordinaten und u_A die kovarianten Koordinaten des Vektors u genannt.

Es ist sehr wichtig zu bemerken, daß die Zerlegung (A.12) in krummlinigen Koordinaten ortsabhängig ist. Es macht keinen Sinn über die Vektorkoordinaten zu sprechen, ohne die Verbindung mit einem bestimmten Ort festzulegen. Diese Schwierigkeit taucht nur im Fall des Euklidischen Raumes auf, wo kein Unterschied zwischen dem Raum selbst und seinem Tangentenraum (dem Raum der Vektoren) besteht.

Die Transformationsregel (A.3) für den Ortsvektor bestimmt auch die Transformationsregeln für die Koordinaten beliebiger Vektoren.

Es gilt

$$g_A = \frac{\partial r}{\partial z^A} = \frac{\partial r'}{\partial z^A} = \frac{\partial r'}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial z^A} = e_k \frac{\partial x_k}{\partial z^A}. \quad (\text{A.13})$$

Das heißt

$$u_A = u \cdot g_A = u \cdot e_k \frac{\partial x_k}{\partial z^A} = u_k \frac{\partial x_k}{\partial z^A}. \quad (\text{A.14})$$

Andererseits gilt

$$g^A = (g^A \cdot e_k) e_k, \quad (\text{A.15})$$

und, mit Hilfe der Definition (A.8), wird

$$\begin{aligned} g_B \cdot g^A &= \left(e_k \frac{\partial x_k}{\partial z^B} \right) \cdot e_l (g^A \cdot e_l) = \frac{\partial x_l}{\partial z^B} (g^A \cdot e_l) = \delta_B^A \\ &\Rightarrow g^A \cdot e_k = \frac{\partial z^A}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^A &= \frac{\partial z^A}{\partial x_k} \mathbf{e}_k, \\ u^A &= u_k \frac{\partial z^A}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Die obigen Transformationsregeln beweisen, daß die drei Funktionen (A.1) vollständig einen Übergang von kartesischen in krummlinigen Koordinaten bestimmen.

Es ist häufig günstiger, die Vektoren der kontravarianten Basis \mathbf{g}^A unmittelbar mit Hilfe der Vektoren \mathbf{g}_A zu rechnen. Es ist einfach zu sehen, daß das Gleichungssystem (A.8) die folgende Lösung hat

$$\mathbf{g}^1 = \frac{1}{g} \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3, \quad \mathbf{g}^2 = \frac{1}{g} \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1, \quad \mathbf{g}^3 = \frac{1}{g} \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 \quad (\text{A.18})$$

mit

$$g := \mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) = \det \left(\frac{\partial x_k}{\partial z^A} \right). \quad (\text{A.19})$$

Beispiele:

1) Wir betrachten den Fall der **schiefwinkligen kartesischen Koordinaten** z^A , die durch die folgenden Gleichungen definiert werden (Abb. A.2)

$$\left. \begin{aligned} z^1 &= \frac{1}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)} (x_1 \cos \alpha_2 - x_2 \sin \alpha_2), \\ z^2 &= \frac{-1}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)} (x_1 \sin \alpha_1 - x_2 \cos \alpha_1), \\ z^3 &= x_3, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = z^1 \cos \alpha_1 + z^2 \sin \alpha_2, \\ x^2 = z^1 \sin \alpha_1 + z^2 \cos \alpha_2, \\ x^3 = z^3, \quad \alpha_1 + \alpha_2 \neq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x_k}{\partial z^A} \right) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_2 & 0 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \left(\frac{\partial z^A}{\partial x_k} \right) &= \begin{pmatrix} \frac{\cos \alpha_2}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)} & -\frac{\sin \alpha_2}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)} & 0 \\ -\frac{\sin \alpha_1}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)} & \frac{\cos \alpha_1}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

mit

$$g = \det \left(\frac{\partial x_k}{\partial z^A} \right) = \cos(\alpha_1 + \alpha_2). \quad (\text{A.22})$$

Die kovarianten und kontravarianten Basisvektoren haben dann die folgende Gestalt:

$$\mathbf{g}_A = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cos \alpha_1 + \mathbf{e}_2 \sin \alpha_1 \\ \mathbf{e}_1 \sin \alpha_2 + \mathbf{e}_2 \cos \alpha_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}^A = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cos \alpha_2 - \mathbf{e}_2 \sin \alpha_2 \\ -\mathbf{e}_1 \sin \alpha_1 + \mathbf{e}_2 \cos \alpha_1 \\ g \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.23})$$

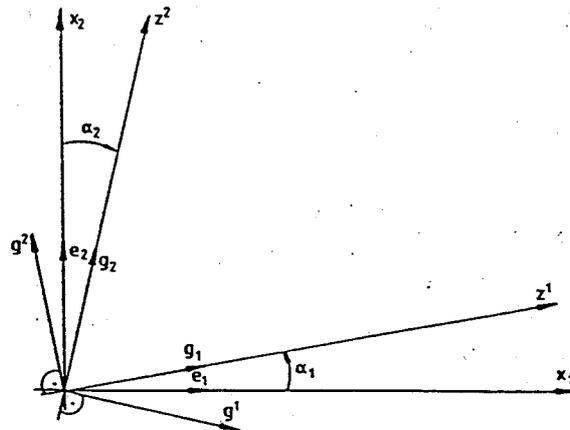


Abb. A.2: Schiefwinklige kartesische Koordinaten

In der folgenden Abbildung A.3 zeigen wir die graphische Konstruktion der Koordinaten eines Vektors u . Es soll nicht vergessen werden, daß die Zahlen (u_1, u_2, u_3) und (u^1, u^2, u^3) durch die Länge der Basisvektoren bestimmt werden, die meistens nicht die Einheitsvektoren bezüglich eines Referenzvektors werden. Grob gesagt, werden die kontravarianten Komponenten durch „Parallelprojektion“ des Vektorpfeils auf die Koordinatenachsen bestimmt und die kovarianten Komponenten durch „Orthogonalprojektion“.

2) Die Zylinderkoordinaten z^A werden durch die folgenden Funktionen gegeben (Abb. A.4)

$$\begin{aligned} z^1 &\equiv r = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}, & x_1 &= r \cos \vartheta, \\ z^2 &\equiv \vartheta = \arctan \frac{x_2}{x_1}, & \text{bzw. } x_2 &= r \sin \vartheta, \\ z^3 &\equiv z = x_3, & x_3 &= z. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

In diesem Fall hat der Ortsvektor r die Gestalt

$$r = x_k e_k = (r \cos \vartheta) e_1 + (r \sin \vartheta) e_2 + z e_3. \quad (\text{A.25})$$

Die kovarianten Basisvektoren folgen durch Differentiation

$$g_A = \begin{pmatrix} \cos \vartheta e_1 + \sin \vartheta e_2 \\ -r \sin \vartheta e_1 + r \cos \vartheta e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}; \quad (\text{A.26})$$

Man sieht hier deutlich, daß diese Vektoren nicht nur ortsabhängig, sondern auch verschiedene Einheiten haben.

$$g_1 \cdot g_1 = 1, \quad g_2 \cdot g_2 = r^2, \quad g_3 \cdot g_3 = 1. \quad (\text{A.27})$$

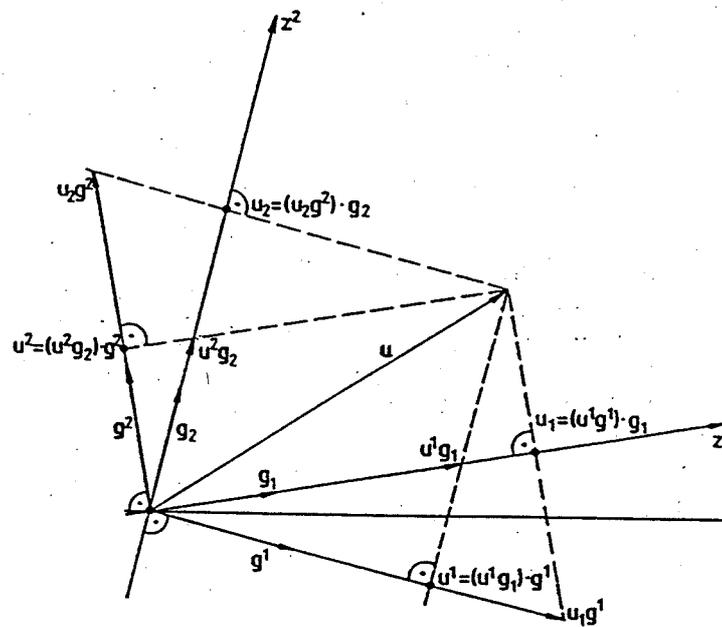


Abb. A.3: Kovariante und kontravariante Koordinaten des Vektors u im schiefwinkligen Koordinatensystem

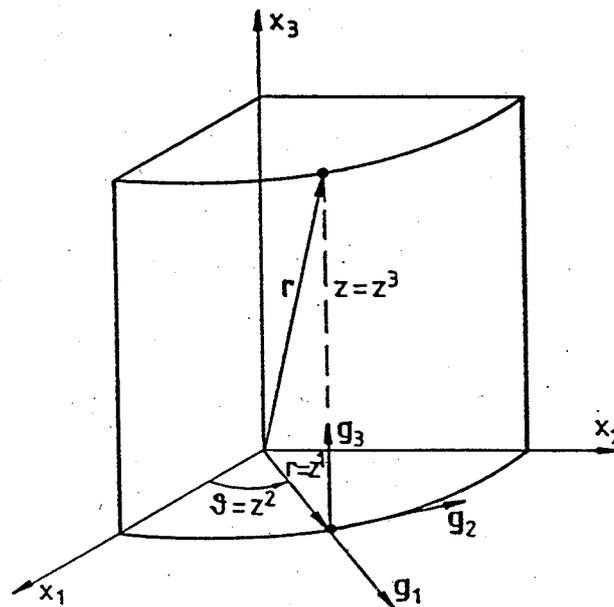


Abb. A.4: Zylinderkoordinaten

Das bedeutet, daß man die kovarianten Komponenten eines Vektors u

$$u_A = u \cdot g_A \quad (\text{A.28})$$

nicht unmittelbar miteinander vergleichen kann.

Mit Hilfe der Regeln (A.18) und (A.19) kann man jetzt die kontravarianten Basisvektoren bestimmen

$$\begin{aligned}
 g &= (\cos \vartheta e_1 + \sin \vartheta e_2) \cdot [(-r \sin \vartheta e_1 + r \cos \vartheta e_2) \times e_3] = r, \\
 g^1 &= \frac{1}{g} (-r \sin \vartheta e_1 + r \cos \vartheta e_2) \times e_3 = \cos \vartheta e_1 + \sin \vartheta e_2 = g_1, \\
 g^2 &= \frac{1}{g} e_3 \times (\cos \vartheta e_1 + \sin \vartheta e_2) = -\frac{1}{r} \sin \vartheta e_1 + \frac{1}{r} \cos \vartheta e_2 = \frac{1}{r^2} g_2, \\
 g^3 &= \frac{1}{g} (\cos \vartheta e_1 + \sin \vartheta e_2) \times (-r \sin \vartheta e_1 + r \cos \vartheta e_2) = e_3 = g_3.
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

Wieder sind die Einheiten der Vektoren unterschiedlich. Die Kollinearität der kovarianten und kontravarianten Basisvektoren folgt aus der Orthogonalität der Koordinatenlinien.

Die Abhängigkeit der Basisvektoren von Ortskoordinaten hat gravierende Folgen für die Differentiationsverfahren von Vektoren und Tensoren. Wir zeigen nun diese Folgen für das Vektorfeld $u = u(z^A)$. Die zwei Fälle der kovarianten und kontravarianten Komponenten werden getrennt untersucht.

1) Kontravariante Komponenten.

Es gilt

$$\frac{\partial u}{\partial z^A} = \frac{\partial}{\partial z^A} (u^B g_B) = \frac{\partial u^B}{\partial z^A} g_B + u^B \frac{\partial g_B}{\partial z^A}. \tag{A.30}$$

Offensichtlich lassen sich die Vektoren $\partial g_B / \partial z^A$ auch mit Hilfe der Basisvektoren g_C schreiben

$$\frac{\partial g_B}{\partial z^A} = \Gamma_{BA}^C g_C, \quad \Gamma_{BA}^C := \frac{\partial g_B}{\partial z^A} \cdot g^C. \tag{A.31}$$

Die Komponenten Γ_{BA}^C werden die **Christoffelsymbole** genannt. Sie spielen eine sehr wichtige Rolle nicht nur im Zusammenhang mit der Differenzierung im Euklidischen Raum, sondern auch in der ganzen geometrischen Theorie der Mannigfaltigkeiten. Die Definition (A.31)₂ läßt sich auch in der folgenden Gestalt schreiben

$$\Gamma_{BA}^C = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial z^A \partial z^B} \cdot g^C = \Gamma_{AB}^C. \tag{A.32}$$

Das heißt, daß von 27 Komponenten nur 18 unabhängig sind. Für bestimmte Koordinatensysteme werden diese Komponenten katalogisiert. Wir zeigen weiter die Rechnungen für einige Beispiele.

Die Beziehung (A.30) läßt sich also schreiben als

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z^A} = \left(\frac{\partial u^C}{\partial z^A} + u^B \Gamma_{BA}^C \right) \mathbf{g}_C. \quad (\text{A.33})$$

Der Ausdruck in Klammern

$$u_{;A}^C := \frac{\partial u^C}{\partial z^A} + u^B \Gamma_{BA}^C \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z^A} = u_{;A}^C \mathbf{g}_C \quad (\text{A.34})$$

wird die **kovariante Ableitung** des „kontravarianten“ Vektors $\{u^C\}$ genannt. Offensichtlich werden alle Christoffelsymbole gleich Null im Fall der kartesischen Koordinaten:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} =: u_{k;l} \equiv u_{k;l}. \quad (\text{A.35})$$

Zusammen mit (A.34)₂ bedeutet das, daß die Koordinatentransformation von kartesischen zu krummlinigen Koordinaten die partiellen Ableitungen in kovariante Ableitungen umwandelt.

2. Kovariante Komponenten.

Es gilt

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z^A} = \frac{\partial}{\partial z^A} (u_B \mathbf{g}^B) = \frac{\partial u_B}{\partial z^A} \mathbf{g}^B + u_B \frac{\partial \mathbf{g}^B}{\partial z^A}. \quad (\text{A.36})$$

Andererseits gilt

$$\frac{\partial}{\partial z^A} (\mathbf{g}_C \cdot \mathbf{g}^B) = \frac{\partial}{\partial z^A} (\delta_C^B) = 0 = \frac{\partial \mathbf{g}_C}{\partial z^A} \cdot \mathbf{g}^B + \mathbf{g}_C \cdot \frac{\partial \mathbf{g}^B}{\partial z^A}. \quad (\text{A.37})$$

Es folgt

$$\frac{\partial \mathbf{g}^B}{\partial z^A} \cdot \mathbf{g}_C = -\Gamma_{CA}^B. \quad (\text{A.38})$$

Infolgedessen ist

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z^A} = \left(\frac{\partial u_C}{\partial z^A} - u_B \Gamma_{AC}^B \right) \mathbf{g}^C. \quad (\text{A.39})$$

Genauso wie im Fall der Gl. (A.33) erhalten wir

$$u_{;A}^C := \frac{\partial u_C}{\partial z^A} - u_B \Gamma_{AC}^B \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z^A} = u_{;A}^C \mathbf{g}^C \quad (\text{A.40})$$

Diesen Operator nennt man die **kovariante Ableitung** des „kovarianten“ Vektors $\{u_C\}$. Die beiden Ableitungen (A.34) und (A.40) sind nur in kartesischen Koordinaten identisch. Diese Identität gemeinsam mit der Identität der kovarianten und kontravarianten Basisvektoren erlaubt, alle Indizes in kartesischen Koordinaten als kovariante Indizes zu schreiben.

3. Tensoren.

Für unsere Zwecke brauchen wir nur die Differentiationsregel für Tensoren zweiten Grades σ (z.B. Cauchysche Spannung). Es ist einfach zu beweisen, daß die folgenden Regeln gelten

$$\begin{aligned}\sigma^{AB}{}_{;C} &= \frac{\partial \sigma^{AB}}{\partial z^C} + \sigma^{DB} \Gamma_{DC}^A + \sigma^{AD} \Gamma_{DC}^B, \\ \sigma^{A.}{}_{B;C} &= \frac{\partial \sigma^{A.}{}_B}{\partial z^C} + \sigma^{D.}{}_B \Gamma_{DC}^A - \sigma^{A.}{}_D \Gamma_{BC}^D, \\ \sigma_{AB;C} &= \frac{\partial \sigma_{AB}}{\partial z^C} - \sigma_{DB} \Gamma_{AC}^D - \sigma_{AD} \Gamma_{BC}^D,\end{aligned}\tag{A.41}$$

wobei

$$\sigma = \sigma^{AB} g_A \otimes g_B = \sigma^{A.}{}_B g_A \otimes g^B = \sigma_{AB} g^A \otimes g^B,\tag{A.42}$$

und \otimes das Tensorprodukt bezeichnet.

Beispiel:

1) **Zylinderkoordinaten:** Differenzierung der Gl. (A.26) nach z^B führt zum Ergebnis

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_A}{\partial z^1} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \vartheta e_1 + \cos \vartheta e_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial g_A}{\partial z^2} &= \begin{pmatrix} -\sin \vartheta e_1 + \cos \vartheta e_2 \\ -r \cos \vartheta e_1 - r \sin \vartheta e_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial g_A}{\partial z^3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{A.43}$$

Das Skalarprodukt dieser Vektoren mit g^C -Vektoren (Gl. A.29) ergeben

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{BC}^A = 0 \quad \text{ansonsten.}\tag{A.44}$$

Mit Hilfe der Christoffelsymbole kann man beispielsweise die Gleichgewichtsbedingung

$$\operatorname{div} \sigma = 0 \Rightarrow \sigma^{AB}{}_{;B} = \frac{\partial \sigma^{AB}}{\partial z^B} + \sigma^{DB} \Gamma_{DB}^A + \sigma^{AD} \Gamma_{DB}^B = 0\tag{A.45}$$

in Zylinderkoordinaten sehr einfach ausschreiben:

$$\begin{aligned}
 A = 1 & : \frac{\partial \sigma^{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma^{r\theta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma^{rz}}{\partial z} - r \sigma^{\theta\theta} + \frac{\sigma^{rr}}{r} = 0, \\
 A = 2 & : \frac{\partial \sigma^{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma^{\theta\theta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma^{\theta z}}{\partial z} + 3 \frac{\sigma^{r\theta}}{r} = 0, \\
 A = 3 & : \frac{\partial \sigma^{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma^{z\theta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma^{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma^{zr}}{r} = 0.
 \end{aligned} \tag{A.46}$$

Der Leser möge die Beschleunigung in Zylinderkoordinaten bestimmen¹.

2) **Kugelkoordinaten:** In diesem Fall betrachten wir die Transformation (siehe Abb. A.5)

$$\begin{aligned}
 z^1 & \equiv r = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}, & x_1 & = r \sin \theta \cos \varphi, \\
 z^2 & \equiv \varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1}, & \text{bzw.} & & x_2 & = r \sin \theta \sin \varphi, \\
 z^3 & \equiv \theta = \arccos \frac{x_3}{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}}, & x_3 & = r \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{A.47}$$

Die Ergebnisse lauten (Beweise !):

$$\begin{aligned}
 g_A & = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi e_1 + \sin \theta \sin \varphi e_2 + \cos \theta e_3 \\ -r \sin \theta \sin \varphi e_1 + r \sin \theta \cos \varphi e_2 \\ r \cos \theta \cos \varphi e_1 + r \cos \theta \sin \varphi e_2 - r \sin \theta e_3 \end{pmatrix}, \\
 g^A & = \begin{pmatrix} g_1 \\ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} g_2 \\ \frac{1}{r^2} g_3 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{A.48}$$

$$g = g_1 \cdot (g_2 \times g_3) = -r^2 \sin \theta. \tag{A.49}$$

Bemerkung: Das Vorzeichen der Größe g wird durch die Transformationsregel (A.47) verursacht, die linkshändige Koordinaten definiert.

¹Die Antwort:

$$\begin{aligned}
 a^r & = \frac{\partial v^r}{\partial t} + v^r \frac{\partial v^r}{\partial r} + v^\theta \frac{\partial v^r}{\partial \theta} + v^z \frac{\partial v^r}{\partial z} - r(v^\theta)^2, & a^r & \equiv a^1, a^\theta \equiv a^2, a^z \equiv a^3, \\
 a^\theta & = \frac{\partial v^\theta}{\partial t} + v^r \frac{\partial v^\theta}{\partial r} + v^\theta \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + v^z \frac{\partial v^\theta}{\partial z} + \frac{2}{r} v^r v^\theta, & v^r & \equiv v^1, v^\theta \equiv v^2, v^z \equiv v^3, \\
 a^z & = \frac{\partial v^z}{\partial t} + v^r \frac{\partial v^z}{\partial r} + v^\theta \frac{\partial v^z}{\partial \theta} + v^z \frac{\partial v^z}{\partial z};
 \end{aligned}$$

Offensichtlich haben weder die verschiedenen Komponenten der Geschwindigkeit noch die verschiedenen Komponenten der Beschleunigung dieselben physikalischen Einheiten.

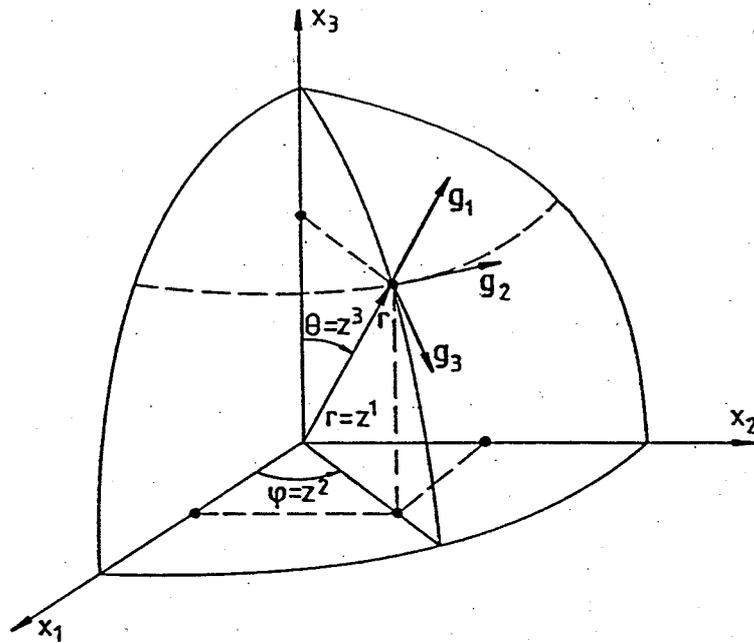


Abb. A.5: Kugelkoordinaten

Mit Hilfe der folgenden Beziehungen, die aus (A.48) folgen,

$$\frac{\partial g_A}{\partial z^1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{r} g_2 \\ \frac{1}{r} g_3 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g_A}{\partial z^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} g_2 \\ -r g_1 + r \cos \theta e_3 \\ \cot \theta g_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g_A}{\partial z^3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} g_3 \\ \cot \theta g_2 \\ -r g_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.50})$$

erhält man die Christoffelsymbole

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{32}^2 = \Gamma_{23}^2 = \cot \theta, \\ \Gamma_{22}^1 = -r \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{22}^3 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{33}^1 = -r, \quad \Gamma_{BC}^A = 0 \text{ sonst.} \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Als Anwendungsbeispiel schreiben wir wieder die Gleichgewichtsgleichung (A.45) aus:

$$\begin{aligned} A = 1: \quad \frac{\partial \sigma^{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma^{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma^{r\theta}}{\partial \theta} - r \sin^2 \theta \sigma^{\varphi\varphi} - r \sigma^{\theta\theta} + \frac{2}{r} \sigma^{rr} + \cot \theta \sigma^{r\theta} &= 0, \\ A = 2: \quad \frac{\partial \sigma^{\varphi r}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma^{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma^{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{3}{r} \sigma^{r\varphi} + 3 \cot \theta \sigma^{\varphi\theta} + \frac{1}{r} \sigma^{r\theta} &= 0, \\ A = 3: \quad \frac{\partial \sigma^{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma^{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{4}{r} \sigma^{r\theta} - \sin \theta \cos \theta \sigma^{\varphi\varphi} + \cot \theta \sigma^{\theta\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Diese Eigenschaft der krummlinigen Koordinaten, daß die verschiedenen Basisvektoren unterschiedliche physikalische Einheiten haben, ist sehr unbequem in der Anwendung, wenn man die Größenordnung vergleichen will. Man kann diesen Mangel verhindern, wenn man die sog. **physikalischen Koordinaten** benutzt. Solche Koordinaten unterscheiden sich von üblichen krummlinigen Koordinaten nur durch die Normierung der Basisvektoren:

$$e_A := \frac{g_A}{\sqrt{g_A \cdot g_A}}, \quad e^A := \frac{g^A}{\sqrt{g^A \cdot g^A}}, \quad A = 1, 2, 3 \text{ (nicht summieren!)} \quad (\text{A.53})$$

Dann läßt sich beispielsweise der Vektor u wie folgt schreiben:

$$u = u^{(A)} e_A = u_{(A)} e^A \quad (\text{A.54})$$

und die Koordinaten $u^{(A)}$ und $u_{(A)}$ haben dieselben Einheiten — sie sind vergleichbar. Offensichtlich gilt

$$u^{(A)} = u^A \sqrt{g_A \cdot g_A}, \quad u_{(A)} = u_A \sqrt{g^A \cdot g^A}.$$

Ähnlichen Regeln kann man auch für Tensoren erhalten. Zum Beispiel hat die Cauchy'sche Spannung σ die folgende Gestalt

$$\begin{aligned} \sigma^{(A)(B)} &= \sigma^{AB} \sqrt{g_A \cdot g_A} \sqrt{g_B \cdot g_B} \\ \sigma^{(A)}_{(B)} &= \sigma^A_{B} \sqrt{g_A \cdot g_A} \sqrt{g^B \cdot g^B}, \quad (\text{nicht summieren!}) \\ \sigma_{(A)(B)} &= \sigma_{AB} \sqrt{g^A \cdot g^A} \sqrt{g^B \cdot g^B}. \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Man kann jetzt die ganze Analyse der krummlinigen Koordinaten für die physikalischen Koordinaten wiederholen. Wir werden das hier nicht tun.

Literaturverzeichnis

- [1] E. BECKER, W. BÜRGER, *Kontinuumsmechanik*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1975.
- [2] J.E. MARSDEN, T.J.R. HUGHES, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- [3] I. MÜLLER; *Thermodynamik, Grundlagen der Materialtheorie*, Bertelsmann, 1973.
- [4] I. MÜLLER; *Thermodynamics*, Pitman, Boston-London-Melbourne, 1984.
- [5] W. PRAGER; *Einführung in die Kontinuumsmechanik*, Birkhäuser Verlag, 1961.
- [6] J. C. SLATTERY; *Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua*, R. E. Krieger Publ. Corp., Huntington, N.Y., 1981.
- [7] C. TRUESDELL; *The Elements of Continuum Mechanics*, Springer, N.Y., 1966.
- [8] C. TRUESDELL; *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, The J. Hopkins University, Baltimore, Md., 1972.
- [9] C. TRUESDELL; R. A. TOUPIN; *The Classical Field Theories*, *Handbuch der Physik*, III/1, Springer, Berlin-Heidelberg, 1960.
- [10] C. TRUESDELL, W. NOLL; *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, *Handbuch der Physik*, III/3, Springer, Berlin-Heidelberg, 1965.
- [11] C.-C. WANG, C. TRUESDELL; *Introduction to Rational Elasticity*, Groningen, Wolters-Nordhoff, 1972.
- [12] Z. WESOŁOWSKI; *Nicht-lineare Elastizitätstheorie*, in: M. SOKOŁOWSKI (ed.); *Elastizität (auf polnisch)*, PWN, Warsaw, 1970.
- [13] Z. WESOŁOWSKI, C. WOZNIAK; *Grundlagen der nicht-linearen Elastizitätstheorie (auf polnisch)*, PWN, Warsaw, 1970.
- [14] K. WILMANSKI; *Foundations of Phenomenological Thermodynamics*, PSB, Warsaw, 1974.
- [15] K. WILMANSKI; *Thermodynamische Modelle der Kontinua*, WPP, Poznan, 1985 (auf polnisch).
- [16] K. WILMANSKI; *Thermodynamic Foundations of Thermoelasticity*, in: *Recent Developments in Thermodynamics of Solids*, G. LEBON, P. PERZYNA (eds), 1-94, Springer, Wien, 1980.

Sachverzeichnis

Ableitung, kovariante	99	Drehgeschwindigkeit	27
Akustische Achse	86	- relative	28
Akustischer Tensor	86	Drehmatrix	28
Amplitude		Drehung der materiellen Vektoren	14
- der sinusoidalen Welle	91	Duale Verzerrungstensoren, siehe: Tensor	
- der Unstetigkeit	84	Duhem-Stokes-Bedingung	65
- wirkliche, der Unstetigkeit	89		
Aufblasen		Energie	
- einer Kugelschale	78	- globale Bilanzgleichung	45
- eines Zylinders	78	- Helmholtzsche Freie	61, 63
Aufweitung eines zylindrischen Keils	77	- innere	45
Ausbreitungsbedingung der		- kinetische	45
Beschleunigungswelle	86	- lokale Bilanzgleichung	46
Ausbreitungsgeschwindigkeit	86	- vollständige	45
Axiomatische Kontinuumsmechanik	32	- Zufuhrdichte	45
		- globale Bilanzgleichung	45
Basisvektoren	93	Entropie	47
- kovariant	94	- Bilanz	47
- kontravariant	94	- Dichte	48
Beschleunigung	24	- Fluß	48
- Coriolische	29	- lokale Bilanzgleichung	48
- Eulersche	29	- Produktion	48
- relative der Translation	29	- Zufuhr	48
- zentrifugale	29	Eulersche	
Beschleunigungswelle	83	- Koordinaten	15
Bewegungsfunktion	12	- (räumliche) Beschreibung	52
Bicharakteristiken	90		
Biegung		Fläche	
- eines Blocks	76	- Gleichung	36
- eines zylindrischen Keils	77	- lokale Geschwindigkeit	36
Bilanzgleichung		- materielle	41
- globale	33, 39, 41, 43, 45, 48	- orthogonaler Einheitsvektor	36
- lokale	35, 40, 42, 44, 46, 48	- singuläre	36
Cauchysche		Flüssigkeit	
- Lemma	39	- isotrope	55
- Satz	40	- Navier-Stokes-Fourier	65
- Spannung	39	- wärmeleitende viskose	53
Christoffelsymbole	98	Fouriersche	
Clausius-Duhem-Ungleichung	61	- Bedingung	46
		- Entwicklung	81
Deformationsgradient	12	Fresnel-Hadamard Theorem	86
- relativ	26		
Drall	43	Geradebiegen eines Zylindersektors	77
- Bilanz	43	Geschwindigkeit	

- normale, der Fläche	83	- lokaler	35
- relative, der Translation	28	Material	
Gibbssche Gleichung	62	- Mooney-Rivlin	73
Gleichgewichtszustand, thermodynamischer	61	- neo-Hookesches	73
Globale Bilanzgleichungen, siehe:		- thermoelastisches	51
Bilanzgleichung		Materialgebiet	34
Größen		materielle	
- objektive	29	- (Lagrangesche) Beschreibung der	
- nicht-objektive	29	Bewegung	24, 51
Gummi	70	- Koordinaten	15
Hadamardscher Satz über singuläre Flächen	84	- Objektivität	53
Hamilton-Cayley Theorem	55	- Teilchen	10
Heterogene Verzerrung	76	monochromatische	
Homogene Verzerrung	73	- Komponente	81
		- Welle	91
Impuls		Normalkraft	79
- Bilanz	38	Oberflächenkraft	38
- lokale Bilanzgleichung	40	Objektivität, materielle	53
- Vektor	38	Ortskoordinaten	15
Inkompressibles Material	68	Phase, der sinusoidalen Welle	91
Isotropiebedingung	70	Poissonsche Bedingung	41
Kelvinscher Effekt	75	Polare Zerlegung	14
Kompatibilitätsbedingung, kinematische	85	Poyntingscher Effekt	75
konstitutive Gleichung, siehe:		Randbedingungen	
Werkstoffgesetze		- für Spannung	41
Kontinuitätsgleichung	35	- für Wärmefußvektor	46
Koordinaten		räumliche (Eulersche) Beschreibung der	
- Eulersche, Ortskoordinaten	15	Bewegung	52
- kovariante	94	Rißausbreitung	8
- kontravariante	94	Schallgeschwindigkeit	91
- krummlinige	92	Schallwelle	80
- Kugel	101	Scherung	
- Lagrangesche, materielle	15	- eines Blocks	76
- physikalische	103	- einfache	16, 74
- schiefwinklige kartesische	95	- eines Zylinders	78
- Zylinder	96	- eines Zylindersektors	77
Koordinatenfläche	92	- eines zylindrischen Keils	77
Koordinatenlinie	93	Schubkräftepaar	79
kovariante Ableitung	99	Singuläre Fläche	36
Lagrangesche		sinusoidale Welle	91
- Beschreibung der Bewegung	24, 51	Spannung	
- Koordinaten	15	- Cauchysche	39
langwellige Näherung	8	- erste Piola-Kirchhoffsche	42
Leistung		- Vektor	39
- der Spannung	45	- viskose	64
- der Volumenkräfte	45	- Symmetriebedingung	45
Liu - Müller Methode	57	- Zwangsreaktion	68
Lösung, universelle	76	- zweite Piola-Kirchhoffsche	
Masse	32	(materielle)	43
Massenbilanzgleichung, globale	33	spezifische Wärme	81
Massendichte	33	Spin	26
Massenerhaltungssatz	33		

starrer Körper	69	- Rechts-Cauchy-Green	14
starre Bewegung	28	Volumenkraft	38
stetige Funktion	9	Volumenkontinuität	32
Stoffgesetze, siehe:		Wärmeflußvektor	45
Werkstoffgesetze		wärmeleitende viskose Flüssigkeit	53
Störungsrechnung	88	Werkstoffgesetze	50
Streckung		- isotrope	72
- eines Blocks	76	Wirbel	27
- isochore	15	Zeitableitung, materielle	35
- eines Zylinders	78	Zerlegung	
- eines Zylindersektors	77	- Euler-Cauchy-Stokes	26
- eines zylindrischen Keils	77	- polare	14
Teilchen		Zufuhrdichte	
- materielle	10	- der Energie	45
- Trajektorie	25	- der Entropie	48
Teilkörper	32	Zwangsbedingungen	66
Tensor		Zwangsreaktionsspannung	68
- akustischer	86	Zylinderkoordinaten	96, 100
- dual	14		
- Links-Streck	15		
- Rechts-Streck	15		
Eigenvektoren	18		
Thermodynamik			
- erster Hauptsatz	45		
- zweiter Hauptsatz	56		
- des thermoelastischen Materials	59		
- der wärmeleitenden viskosen			
Flüssigkeit	62		
thermodynamischer Gleichgewichtszustand	61		
thermoelastisches Material	51		
- objektive konstitutive Gleichungen	54		
Torsion			
- des Zylinders	78		
- eines zylindrischen Keils	77		
Turbulenz	10		
Umklappen einer Kugelschale	78		
Undehnbarkeit	68		
universelle Lösung	76		
Vektoren			
- materielle	13		
- nicht-materielle	22		
Verdrehen eines Zylinders	79		
Verzerrung			
- heterogene	76		
- homogene	73		
- plastische	13		
Verzerrungsgeschwindigkeitstensor	26		
Verzerrungstensor			
- Almansi-Hamel	14		
- Eigenwertproblem	20		
- Green-St. Venant	14		
- Links-Cauchy-Green	14		